

Kohomologie von nichtassoziativen Algebren und Tripelsystemen

Peter Seibt

1973



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554601_0080

Kohomologie von nichtassoziativen Algebren
und Tripelsystemen

Inaugural - Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
der Fakultät für Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von
Peter S e i b t
aus München

München, April 1973



1. Referent : Prof. Dr. K. Helwig

2. Referent : Prof. Dr. B. Pareigis

Tag der mündlichen Prüfung : 5. 11. 1973

Inhaltsübersicht :

Einleitung

1. Grundzüge der Darstellungstheorie von nichtassoziativen Algebren und Tripelsystemen.
 - 1.1 Grundsätzliche Betrachtungen.
 - 1.2 Die Kategorie $\mathbf{T}\text{-Mod } A$ bzw. $\mathbf{T}\text{-Mod } T$.
 - 1.3 Varianten und Beispiele.
2. Singuläre Erweiterungen von nichtassoziativen Algebren und Tripelsystemen.
 - 2.1 Einfache singuläre $\mathbf{T}$ -Erweiterungen, $\mathbf{T}$ -Faktorsysteme und generische $\mathbf{T}$ -Erweiterungen.
 - 2.2 n -fache singuläre $\mathbf{T}$ -Erweiterungen.
3. Der Derivationsfunktork.
 - 3.1 Darstellbarkeit des Derivationsfunktors in der einschlägigen Modulkategorie.
 - 3.2 Exaktheitsfragen. Innere Derivationen.
4. Eine Kohomologietheorie von nichtassoziativen Algebren und Tripelsystemen : Die Theorie der exakt verbundenen Folge der rechtsabgeleiteten Funktoren des Derivationsfunktors.
 - 4.1 Charakterisierung von $H^1(A, M)$ bzw. $H^1(T, M)$.
 - 4.2 Zu den höheren Kohomologieräumen.
5. Kohomologisch zulässige Kategorien von Algebren und Tripelsystemen.
 - 5.1 Kohomologische Zulässigkeit und kohomologische Trivialität.
 - 5.2 Beispiele kohomologisch zulässiger Kategorien von Algebren und Tripelsystemen.
6. Der Fall der Jordan-Algebren.
 - 6.1 Die kohomologische Zulässigkeit der Jordan-Matrixalgebren vom Grad ≥ 4 .
 - 6.2 Kohomologisch nicht zulässige unitäre Jordan-Algebren.
 - 6.3 Eine Lie-theoretische Charakterisierung zulässiger Jordan-Erweiterungen.

Einleitung

Betrachtet man die beiden klassischen Kohomologietheorien von Hochschild für unitäre assoziative Algebren und für Lie-Algebren (vgl. dazu etwa Cartan-Eilenberg [4]), so sieht man sich in folgender überaus befriedigenden Situation :

- (A) Der homologisch-technische Apparat ist letztlich nichts anderes als die Theorie der abgeleiteten Funktoren des Hom-Funktors auf einer geeigneten Modulkategorie - mit allen damit verbundenen Informationsvorteilen.
- (B) Kohomologie und singuläre Erweiterungstheorie der jeweiligen Algebra sind äquivalent in dem Sinne, daß die auftretenden (höheren) Kohomologiegruppen eine vollständige und natürliche erweiterungstheoretische Interpretation erlauben (Yoneda-Interpretation).

Eine allgemeine Kohomologietheorie von nichtassoziativen Algebren und Tripelsystemen, die sich als Fortführung und Verallgemeinerung des Hochschildschen Ansatzes und in Übereinstimmung mit seiner Motivation versteht, kann nun ihren Hauptakzent entweder auf Befriedigung der Forderung (A) (vgl. etwa die Arbeiten von Barr-Rinehart [1] und B. Pareigis [21]) oder auf Befriedigung der Forderung (B) (vgl. die Arbeiten von M. Gerstenhaber [6] und N. Glassman [8]) legen. In beiden Fällen bleibt die Erfüllung der jeweils anderen Forderung ein offenes Problem.

Die vorliegende Arbeit versucht nun, der Frage nach der Verträglichkeit der Forderungen (A) und (B) in verhältnismäßig allgemeinem Rahmen nachzugehen. Dabei wird in Anlehnung an den von B. Pareigis in [21] vorgeschlagenen Ansatz Kohomologie von nichtassoziativen Algebren und Tripelsystemen zuerst einmal als Theorie der rechtsabgeleiteten Funktoren des jeweiligen Derivationsfunktors definiert (was die Forderung (A) erfüllt). Die weitere Untersuchung zeigt dann, in welchem Maße damit der Forderung (B) Genüge getan ist.

Konkret lassen sich Situation und Ergebnisse folgendermaßen skizzieren :

Sei A eine T -Algebra über dem Körper k , d.h. eine nichtassoziative k -Algebra vom Typ T (wobei T , die Menge der durch die Multiplikation zu erfüllenden Identitäten, als Teilmenge eines geeigneten freien Objekts gegeben ist). A besitzt eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte universelle T -Multiplikationseinhüllende U , eine unitäre assoziative Algebra über k , so daß die Kategorie $\text{Mod } U$ der unitären U -Linksmoduln gerade die Kategorie der Kerne einfacher singulärer T -Erweiterungen von A ist (singuläre T -Erweiterung von A bedeutet dabei Erweiterung von A in $T\text{-Alg } k$ mit "abelschem" Kern). Diese Kategorie $\text{Mod } U$ ist die für die Kohomologie von A relevante Koeffizientenkategorie.

Der $(A, -)$, der Derivationsfunktorkomplex von $\text{Mod } U$ in die Kategorie der k -Vektorräume, ist in $\text{Mod } U$ darstellbar; bezeichne $D(A)$ "den" darstellenden sogenannten abgeleiteten Modul.

Bei Identifikation von $\text{Der}(A, -)$ mit $\text{Hom}_U(D(A), -)$ und bei Definition der Kohomologie von A durch die exakt verbundene Folge $(H^n(A, -)) = (\text{Ext}_U^n(D(A), -))_{n \geq 0}$ der rechtsabgeleiteten Funktoren des Derivationsfunktors erhält man natürlich zuerst einmal die Kohomologie des abgeleiteten Moduls $D(A)$.

Jedoch läßt sich folgendes zeigen :

Es existiert ein passender Begriff "innerer" Derivationen, so daß $\text{Der}(A, -)$ exakt ist ($H^n(A, -) = 0$ für alle $n \geq 1$) genau dann, wenn alle Derivationen von A in alle U -Linksmoduln innere sind.

Für alle $n \geq 1$ und für jeden U -Linksmodul M existiert ein in M funktorieller k -Monomorphismus

$$\bigwedge_n : H^n(A, M) \longrightarrow n\text{-Ext}(A, M)$$

(wobei $n\text{-Ext}(A, -)$ den n -ten Yoneda-Funktorkomplex bezeichne), und $H^n(A, M)$ ist Yoneda-interpretierbar, d.h. Im $\bigwedge_n$ läßt sich in

der Sprache der singulären Erweiterungstheorie von A charakterisieren.

Insbesondere beschreibt $H^1(A, M)$ diejenigen Äquivalenzklassen einfacher singulärer T -Erweiterungen von A durch M , deren Repräsentanten sich in zerfallende singuläre T -Erweiterungen einbetten lassen.

Nennt man nun eine T -Algebra A kohomologisch zulässig, wenn für sie der der Forderung (A) genügende Pareigissche Ansatz und der der Forderung (B) genügende Gerstenhabersche Ansatz zu äquivalenten Kohomologien führen, d.h. wenn $H^n(A, -) \cong \text{Ext}(A, -)$ für alle $n \geq 1$ gilt, so muß man sich mit folgender Situation abfinden :

Zwar ist kohomologische Zulässigkeit eine lineare Eigenschaft (d.h. wird von Grundkörpererweiterungen nicht berührt) und stabil unter direkten Limites, jedoch vererbt sie sich im allgemeinen weder auf Unterobjekte noch auf homomorphe Bilder.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich in gleicher Weise mit Tripelsystemen (gegebenen Typs T) über Körpern und einigen Varianten im Algebrenfall (T -Algebren mit Involution oder Automorphismus der Periode 2, unitäre Varianten). Dabei ergeben sich die gleichen allgemeinen Resultate.

Tatsächlich kann nämlich, wie aus den expliziten Überlegungen im Algebren- und Tripelsystemfall und bei den Varianten im Algebrenfall ohne große Schwierigkeiten herausdestillierbar, der gesamte darstellungs- und erweiterungstheoretische Apparat mit der darüberliegenden Kohomologietheorie und den dazu angegebenen Resultaten ganz allgemein für lineare T -Algebren höheren gemischten Typs formuliert und bewiesen werden. Als solche verstehe man einfach Ω -Algebren (im Sinne der universellen Algebra) über der Kategorie der k -Vektorräume, wobei der Operatorenbereich Ω als endlich vorausgesetzt und der

Typ T wiederum als vorgegebene Menge von Identitäten für die auftretenden Verknüpfungen in einem geeigneten freien Objekt formalisiert ist. Auf die Fleißarbeit, in einem solchermaßen allgemeineren Rahmen zu arbeiten, habe ich schon aus Lesbarkeitsgründen verzichtet. Verallgemeinerungsmöglichkeiten in eine andere Richtung werden durch die Arbeit [18] von A.S.T. Lue nahegelegt.

Doch zurück zur kohomologischen Zulässigkeit. Wie schon zu Beginn erwähnt (vgl. auch die Arbeit [1] von Barr-Rinehart), sind die Kategorien der unitären assoziativen Algebren und der Lie-Algebren über einem Körper k kohomologisch zulässig (d.h. alle Objekte darin sind es); das gleiche gilt dann auch fast automatisch für die Kategorien der unitären assoziativen Algebren mit Involution sowie der Lie-Algebren mit Automorphismus der Periode 2 über einem Körper der Charakteristik $\neq 2$. Es kann gezeigt werden, daß die von B. Harris in [9] entwickelte Kohomologietheorie für Lie-Algebren mit Automorphismus der Periode 2 zu der hier beschriebenen in befriedigender Weise äquivalent ist; ebenso wird die kohomologische Zulässigkeit der Kategorie der Lie-Tripelsysteme über einem Körper der Charakteristik $\neq 2$ nachgewiesen und damit ein Defekt der Harris'schen Kohomologietheorie (vgl.[9]), nämlich das Fehlen einer langen exakten Kohomologiesequenz, behoben.

Zur kohomologischen Zulässigkeit der Kategorie der p -Lie-Algebren vergleiche man die Arbeit [21] von B. Pareigis.

Im Falle der Kategorie der unitären kommutativen und assoziativen Algebren über einem Körper k existieren bereits recht harmlose Beispiele kohomologisch nicht zulässiger Objekte (vgl. dazu J.M. Beck [2] und M. Gerstenhaber [7] für Beispiele lokaler oder gar halbeinfacher Algebren, die nicht-triviale Erweiterungen mit injektiven Moduln besitzen), so daß hier eine strukturtheoretische Charakterisierung der kohomologisch zulässigen Objekte einigermaßen uninteressant erscheint.

Anders liegt der Fall bei den unitären Jordan-Algebren über einem Körper der Charakteristik $\neq 2$. Auch hier existieren verhältnismäßig triviale Objekte, die nicht kohomologisch zulässig sind (so z.B. die Algebra der dualen Zahlen, aufgefaßt als unitäre Jordan-Algebra), jedoch ist mit den Jordan Matrixalgebren vom Grad ≥ 4 eine ziemlich große Klasse kohomologisch zulässiger unitärer Jordan-Algebren gesichert, so daß hier eine strukturtheoretische Charakterisierung der kohomologisch zulässigen Objekte ein interessantes Problem zu sein scheint. Mir ist die Lösung dieses Problems bislang noch nicht gelungen; der abschließende Satz 7 der vorliegenden Arbeit, der die Einbettbarkeit einer unitären singulären Jordan Erweiterung in eine Split-Erweiterung via Koecher-Konstruktion in der Kategorie der Lie-Algebren mit Automorphismus der Periode 2 charakterisiert, ist möglicherweise der erste gute Schritt in dieser Richtung.

Abschließend sei noch allen, die das Entstehen dieser Arbeit auf ihre Weise gefördert haben, vornehmlich aber meinem Lehrer, Herrn Dr. K. Helwig, auf das herzlichste gedankt.

München, im April 1973

1. Grundzüge der Darstellungstheorie von nichtassoziativen Algebren und Tripelsystemen.

Das Programm dieses Abschnittes ist ein kurzer Überblick über die darstellungstheoretische Formulierung einfacher erweiterungstheoretischer Sachverhalte. Als einschlägige Literatur hierzu seien die allgemeinen Überlegungen in den ersten beiden Kapiteln des Buches [12] von N. Jacobson und die Arbeit [14] von J. Knopfmacher zitiert.

1.1 Grundsätzliche Betrachtungen.

1.1.1 Freie nicht-assoziative Algebren und freie Tripelsysteme.

Sei k ein Körper, $\text{Mod } k$ die Kategorie der k -Vektorräume, $\text{Alg } k$ die Kategorie der k -Algebren, $\text{T.S. } k$ die Kategorie der Tripelsysteme über k . Zu Objekten $M, N \in \text{Mod } k$ bezeichne $\text{Hom}_k(M, N)$ den Raum der k -linearen Abbildungen von M in N ; analog sei zu $A, B \in \text{Alg } k$ $\text{Hom}(A, B)$ die Menge der Algebrenhomomorphismen von A in B und zu $T, V \in \text{T.S. } k$ $\text{Hom}(T, V)$ die Menge der Tripelsystemhomomorphismen von T in V .

Die Vergißfunktoren $\text{Alg } k \rightarrow \text{Mod } k$ und $\text{T.S. } k \rightarrow \text{Mod } k$ besitzen jeweils einen linksadjungierten Funktor F (die gleiche Notation in beiden Fällen schafft im folgenden keine Probleme), d.h. zu jedem k -Vektorraum M ist in FM die freie nicht-assoziative k -Algebra über M bzw. das freie k -Tripelsystem über M gesichert.

1.1.2 Die Kategorie der T-Algebren bzw. die Kategorie der T-Tripelsysteme über dem Körper k .

Sei $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ ein abzählbares Alphabet,

$M = k^{(X)}$ der k -Vektorraum mit k -Basis X .

Dann heie $F = FM \in \text{Alg } k$ die syntaktische k -Algebra und $F = FM \in \text{T.S. } k$ das syntaktische k -Tripelsystem.

Man beachte, daß F als kanonische k -Basis die Menge der Funktionalschemas gebildet aus einem zwei- bzw. dreistelligen Funktionalsymbol und den Elementen von X als nullstelligen Funktionalsymbolen besitzt (vgl. Kreisel-Krivine [15], *Préliminaires*).

Sei nun T eine Teilmenge von F .

$T\text{-Alg } k$, die Kategorie der T -Algebren über k , definiert sich folgendermaßen :

Für jede k -Algebra A sei $\text{rad}_T A$ das zweiseitige Ideal von A (das T -Radikal von A), das von

$U \varphi(T)$ erzeugt wird.

$\varphi \in \text{Hom}(F, A)$

rad_T beschreibt einen Subfunctor der Identität von $\text{Alg } k$,

d.h. für $\varphi \in \text{Hom}(A, B)$ gilt : $\varphi(\text{rad}_T A) \subset \text{rad}_T B$.

Setzt man $A_T = A / \text{rad}_T A$, so wird damit über die kanonischen Epimorphismen folgendes kommutatives Diagramm induziert :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\psi} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_T & \xrightarrow{\psi_T} & B_T \end{array}$$

$T\text{-Alg } k$ sei nun die Kategorie der T -radikalfreien k -Algebren; präziser: die Objekte von $T\text{-Alg } k$ sind die $A \in \text{Alg } k$ mit $\text{rad}_T A = 0$; für die Morphismen gilt : $\text{Hom}_T(A, B) = \text{Hom}(A, B)$.

Da nun $\text{rad}_T A_T = 0$ gilt, haben wir nach obigem auch gleich den kanonischen Funktor $\text{Alg } k \longrightarrow T\text{-Alg } k$.

Völlig analog erhält man $T\text{-T.S.} k$, die Kategorie der T -Tripelsysteme über k , mit dem kanonischen Funktor $T\text{-S.} k \longrightarrow T\text{-T.S.} k$.

Natürlich besitzen die Vergißfunctoren $T\text{-Alg } k \longrightarrow \text{Mod } k$ und $T\text{-T.S.} k \longrightarrow \text{Mod } k$ wiederum jeweils einen linksadjungierten Funktor F_T , wobei zu $M \in \text{Mod } k$ / $F_T M \simeq (FM)_T$ die freie T -Algebra bzw. das freie T -Tripelsystem über dem k -Vektorraum M ist.

1.1.3 Die darstellungstheoretisch interessanten Teilmengen T von F .

Die klassischen Mengen definierender Identitäten T für die Kategorien der assoziativen Algebren, der Lie-Algebren, der Jordan-Algebren und der alternativen Algebren über dem Körper k (im Jordan-Fall $\text{char } k \neq 2$!) werden als bekannt vorausgesetzt.

Die Mengen definierender Identitäten T für die Kategorien der Lie-Tripelsysteme (vgl. B. Harris [9] und K. Meyberg [20]), der Jordan-Tripelsysteme (vgl. O. Loos [16] und K. Meyberg [20]) sowie der assoziativen und alternativen Tripelsysteme (vgl. O. Loos [17]) über einem Körper der Charakteristik $\neq 2$ finden sich in der angegebenen Literatur.

Alle zitierten Algebren- und Tripelsystemtypen genügen folgenden zwei Fundamenteigenschaften :

(I) Typinvarianz bei Körpererweiterungen :

Sei $k \hookrightarrow l$ eine Körpererweiterung, und

sei $A \in /T\text{-Alg } k/$, dann gilt :

$$A_1 = l \otimes A \in /T\text{-Alg } l/.$$

Analog im Tripelsystemfall.

(II) Existenz der regulären Bi- bzw. Tridarstellungen.

Sei $k[\varepsilon]$ die Algebra der dualen Zahlen über k ,

und sei $A \in /T\text{-Alg } k/$, dann gilt auch :

$$A_{k[\varepsilon]} = k[\varepsilon] \otimes A \in /T\text{-Alg } k/.$$

Analog für Tripelsysteme.

Im Algebrenfall sind bei N. Jacobson [12] hinreichende Bedingungen an das Paar (T, k) zu finden, so daß (I) und (II) gelten. Man sieht leicht, daß und wie sich alle dort gemachten Überlegungen auch auf den Tripelsystemfall übertragen.

Im folgenden wird immer vorausgesetzt, daß das Paar (T, k) (I) und (II) zuläßt.

1.2 Die Kategorie $T\text{-Mod } A$ bzw. $T\text{-Mod } T$.

1.2.1 T -Tridarstellungen einer T -Algebra. T -Tridarstellungen eines T -Tripelsystems.

Sei A eine k -Algebra, M ein k -Vektorraum.

Ein Paar $(\lambda, \varphi) \in \text{Hom}_k(A, \text{End}_k M) \times \text{Hom}_k(A, \text{End}_k M)$

heißt eine Bidarstellung von A in M .

$E(\lambda, \varphi)$ bezeichne die k -Algebra, die entsteht, wenn man auf $A \otimes M$ die Multiplikation

$(a \otimes m) (b \otimes n) := ab \otimes \lambda(a)n + \varrho(b)m$
definiert.

A ist dann Unteralgebra, M Ideal von $E(\lambda, \varrho)$, und es gilt $M^2 = 0$. Bezeichnen L und R die Links- und Rechtsmultiplikation in $E(\lambda, \varrho)$, so sind λ und ϱ gerade deren Restriktionen - im Argumentbereich auf A , im Bildbereich auf $\text{End}_K M$ (betrachtet als Unteralgebra von $\text{End}_K E(\lambda, \varrho)$).

Analog ist die Situation für Tripelsysteme :

Sei T ein k -Tripelsystem, M ein k -Vektorraum.

Ein Tripel (λ, μ, ϱ) mit $\lambda, \mu, \varrho \in \text{Hom}_K(T \otimes T, \text{End}_K M)$ heißt eine
Tridarstellung von T in M .

$E(\lambda, \mu, \varrho)$ bezeichne das k -Tripelsystem, das entsteht, wenn auf $T \otimes M$ die trilineare Verknüpfung

$[a \otimes m, b \otimes n, c \otimes p] := [a, b, c] \otimes \lambda(a \otimes b)p + \mu(a \otimes c)n + \varrho(b \otimes c)m$
definiert wird.

T ist Untertripelsystem, M Tripelideal von $E = E(\lambda, \mu, \varrho)$
(d.h. $[E, E, M] + [E, M, E] + [M, E, E] \subset M$),

und es gilt $[M, M, E] = [M, E, M] = [E, M, M] = 0$.

Bezeichnen $L, M, R : E \otimes E \longrightarrow \text{End}_K E$ die durch

$[x, y, z] = L(x \otimes y)z = M(x \otimes z)y = R(y \otimes z)x$

definierten k -linearen Abbildungen, so sind wiederum λ, μ und ϱ gerade deren Restriktionen - im Argumentbereich auf $T \otimes T$, im Bildbereich auf $\text{End}_K M$.

Die angegebene Situation ist offenbar charakteristisch für Bi- bzw. Tridarstellungen; damit sind die Schreibweisen $E(A, M)$ statt $E(\lambda, \varrho)$ bzw. $E(T, M)$ statt $E(\lambda, \mu, \varrho)$ und a_m, m_a statt $\lambda(a)m, \varrho(a)m$ bzw. $[a, b, m]$, $[a, m, b]$ und $[m, a, b]$ statt $\lambda(a \otimes b)m, \mu(a \otimes b)m$ und $\varrho(a \otimes b)m$ gerechtfertigt. Unter diesem Gesichtspunkt bezeichnet man dann M als Bimodul von A bzw. als Trimodul von T .

Sei nun M ein Bimodul von A .

Dann bezeichne $\text{Der}(A, M)$ den k -Vektorraum der Elemente $d \in \text{Hom}_K(A, M)$, für die Graph d Unteralgebra von $E(A, M)$ ist,

d.h. für die gilt :

$$d(ab) = a db + (da)b \quad \text{für alle } a, b \in A.$$

Analog bezeichne zu einem Trimodul M von T

$\text{Der}(T, M)$ den k -Vektorraum der Elemente $d \in \text{Hom}_k(T, M)$
für die Graph d Untertripelsystem von $E(T, M)$ ist, d.h.
für die gilt :

$$d([a, b, c]) = [da, b, c] + [a, db, c] + [a, b, dc] \\ \text{für alle } a, b, c \in T.$$

Die so charakterisierten k -linearen Abbildungen nennt man
Derivationen von A bzw. T in M .

Sei nun $A \in /T\text{-Alg } k/, M \in /Mod\ k/, (\lambda, \varphi)$ eine Bidarstellung
von A in M .

(λ, φ) heißt T -Bidarstellung von A in M genau dann, wenn
gilt : $E(\lambda, \varphi) \in /T\text{-Alg } k/$.

Analog heißt für $T \in /T\text{-T.S. } k/, M \in /Mod\ k/$ eine Tridarstellung
 (λ, μ, φ) von T in M

T -Tridarstellung von T in M genau dann, wenn gilt :

$$E(\lambda, \mu, \varphi) \in /T\text{-T.S. } k/.$$

Unter einem T -Bimodul M einer T -Algebra A versteht man also
kurz ein zu A in einer T -Oberalgebra $E(A, M)$ von A k -komple-
mentäres Ideal mit $M^2 = 0$.

Die analoge Aussage für T -Trimoduln eines T -Tripelsystems T
ist klar.

Gemäß den unter 1.1.3 angegebenen Generalvoraussetzungen
ist für jede T -Algebra A die durch Links- und Rechtsmulti-
plikation L und R von A gegebene Bidarstellung (L, R) eine
 T -Bidarstellung, ebenso ist für jedes T -Tripelsystem T die
durch Links-, Mittel- und Rechtsbimultiplikation L, M und R
von T gegebene Tridarstellung (L, M, R) eine T -Tridarstellung.
 (L, R) heißt die reguläre Bidarstellung der T -Algebra A ,
 (L, M, R) die reguläre Tridarstellung des T -Tripelsystems T .

1.2.2 Die "Arithmetik" der T-Bidarstellungen und der T-Tridarstellungen.

Sei $\mathbb{F}$ die syntaktische k -Algebra bzw. das syntaktische k -Tripelsystem.

$\mathbb{G}$ bezeichne

(i) im Algeorenfall

die Tensoralgebra des k -Vektorraumes $\widehat{\mathbb{F}} \otimes \widehat{\mathbb{F}}$

(zwei k -isomorphe Kopien von $\mathbb{F}$)

mit Bimodulstruktur für $\mathbb{F}$ gemäß

$rt := \overleftarrow{r}ot, tr := \overrightarrow{r}ot$ für alle $r \in \mathbb{F}, t \in \mathbb{G}$.

(ii) im Tripelsystemfall

die Tensoralgebra des k -Vektorraumes $\widehat{\mathbb{F} \otimes \mathbb{F}} \otimes \widehat{\mathbb{F} \otimes \mathbb{F}} \otimes \widehat{\mathbb{F} \otimes \mathbb{F}}$

(drei k -isomorphe Kopien von $\mathbb{F} \otimes \mathbb{F}$)

mit Trimodulstruktur für $\mathbb{F}$ gemäß

$[r,s,t] := \overleftarrow{r}os \otimes t$

$[r,t,s] := \widehat{r}as \otimes t$ für alle $r,s \in \mathbb{F}, t \in \mathbb{G}$.

$[t,r,s] := \overrightarrow{r}as \otimes t$

Der($\mathbb{F}, \mathbb{G}$) heie der Polarisierungsraum für Alg k bzw. für T.S.k.

Die Fundamentalpolarisierungsderivationen $\frac{\partial}{\partial x_i} \in \text{Der}(\mathbb{F}, \mathbb{G})$ sind durch $\frac{\partial}{\partial x_i} x_j := \delta_{ij} \cdot 1, i, j \in \mathbb{N}$, eindeutig bestimmt.

Zu $T \in \mathbb{F}$ heie $\partial T := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_i} (T)$ die Polarisierung von T (in $\mathbb{G}$).

Sei nun (λ, φ) eine (feste) Bidarstellung der T -Algebra A in den k -Vektorraum M .

Zu $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{F}, A)$ sei $\langle \varphi \rangle \in \text{Hom}(\mathbb{G}, \text{End}_k M)$ der Homomorphismus unitärer assoziativer Algebren, der abbildet :

$1 \longmapsto 1, \overleftarrow{r} \longmapsto \lambda \varphi(r), \overrightarrow{r} \longmapsto \varphi \varphi(r)$

für alle $r \in \mathbb{F}$.

Dann gilt : (λ, φ) ist T-Bidarstellung von A in M $\iff$

$$\langle \varphi \rangle (\partial T) = 0 \text{ für alle } \varphi \in \text{Hom}(F, A).$$

Zum Beweis sei auf N. Jacobson [12], S.84, verwiesen (man beachte, daß die dort verwendete Abbildung $f \mapsto F_i$ nichts anderes ist als die Derivation $\frac{\partial}{\partial x_i}$!).

Analog sei (λ, μ, φ) eine (feste) Tridarstellung des T-Tripelsystems T in den k-Vektorraum M.

Zu $\varphi \in \text{Hom}(F, T)$ sei wiederum $\langle \varphi \rangle \in \text{Hom}(T, \text{End}_k M)$ der Homomorphismus unitärer assoziativer Algebren, der abbildet :

$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto 1, & \overleftarrow{r} \overleftarrow{s} &\longmapsto \lambda(\varphi(r) \otimes \varphi(s)) \\ \widehat{r} \overleftarrow{s} &\longmapsto \mu(\varphi(r) \otimes \varphi(s)), & \overrightarrow{r} \overrightarrow{s} &\longmapsto \varphi(\varphi(r) \otimes \varphi(s)) \end{aligned}$$

für alle $r, s \in F$.

Dann gilt auch hier :

(λ, μ, φ) ist T-Tridarstellung von T in M $\iff$
 $\langle \varphi \rangle (\partial T) = 0$ für alle $\varphi \in \text{Hom}(F, T)$.

Der oben zitierte Beweis von N. Jacobson im Algebrenfall überträgt sich mit den natürlichen Modifikationen sofort ohne Schwierigkeiten auch auf den Tripelsystemfall.

Damit ist wie im Algebren- so auch im Tripelsystemfall ein expliziter Algorithmus gesichert, der es erlaubt, zu gegebenen (endlichen) $T \subset F$ die über die k-Linearität hinausgehenden Bedingungen an die Komponenten von T-Bidarstellungen bzw. T-Tridarstellungen zu bestimmen.

Für die klassischen Fälle der assoziativen Algebren, der Lie-Algebren, der alternativen Algebren und der Jordan-Algebren sind die sich ergebenden "Operatoridentitäten" in N. Jacobson [12], S.85/86 zu finden.

Es wird hier darauf verzichtet, die Lie-, Jordan- oder alternativen Tridarstellungsidentitäten aufzulisten, da sie explizit im folgenden nie gebraucht werden. Zur Illustration sei nur angemerkt :

Sei (λ, μ, ϱ) eine Jordan-Tridarstellung eines Jordan-Tripelsystems T ; dann gilt zuallererst $\lambda(a \times b) = \varrho(b \times a)$ für alle $a, b \in T$, so daß man sich im weiteren nur auf die für λ und μ geltenden Identitäten beschränken kann. Dann erhält man aber gerade die ersten fünf der von O. Loos in [16], S.50, angegebenen sechs Darstellungsidentitäten.

1.2.3 Universelle T-Multiplikationseinhüllende.

Sei A eine k -Algebra, G eine unitäre assoziative k -Algebra.

Ein Paar $(\lambda, \varrho) \in \text{Hom}_k(A, G) \times \text{Hom}_k(A, G)$ heißt Multiplikationsspezialisierung von A in G .

Ebenso heiße zu einem k -Tripelsystem T und einer unitären assoziativen k -Algebra G ein Tripel (λ, μ, ϱ) mit $\lambda, \mu, \varrho \in \text{Hom}_k(T \otimes T, G)$ eine Multiplikationsspezialisierung von T in G .

Offenbar sind die Begriffe der Multiplikationsspezialisierung und der Bidarstellung bzw. der Tridarstellung äquivalent.

Zu $A \in \mathcal{T}\text{-Alg } k/$ sei nun eine Multiplikationsspezialisierung (λ, ϱ) in die unitäre assoziative Algebra G fest gegeben.

Bezeichne zu $\varphi \in \text{Hom}(F, A)$ wiederum $\langle \varphi \rangle \in \text{Hom}(G, G)$ den Homomorphismus unitärer assoziativer Algebren, der abbildet :
 $1 \mapsto 1, \quad \tilde{r} \mapsto \lambda \varphi(r), \quad \tilde{r} \mapsto \varrho \varphi(r)$ für alle $r \in F$.

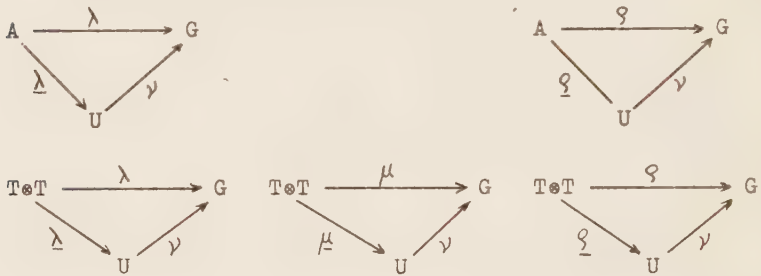
(λ, ϱ) heißt T-Multiplikationsspezialisierung von A in G genau dann, wenn gilt : $\langle \varphi \rangle(\partial T) = 0$ für alle $\varphi \in \text{Hom}(F, A)$.

Nach Obigem sind damit die Begriffe T-Multiplikationsspezialisierung und der T-Bidarstellung äquivalent.

Analog dazu definiert sich der Begriff der T-Multiplikationsspezialisierung (λ, μ, ϱ) eines T-Tripelsystems T in eine unitäre assoziative Algebra G , so daß auch hier Äquivalenz zum Begriff der T-Tridarstellung von T gegeben ist.

Zu einer T-Algebra A bzw. einem T-Tripelsystem T heiße (U, λ, ϱ) bzw. $(U, \lambda, \mu, \varrho)$ universelle T-Multiplikationseinhüllende, falls gilt :

- (i) U ist unitäre assoziative Algebra und (λ, ϱ) bzw. (λ, μ, ϱ) ist T -Multiplikationsspezialisierung von A bzw. T in U .
- (ii) Zu jeder T -Multiplikationsspezialisierung (λ, ϱ) von A bzw. (λ, μ, ϱ) von T (in eine unitäre assoziative Algebra G) gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus ν unitärer assoziativer Algebren, so daß die folgenden Diagramme kommutativ sind :



Auf Existenz und fundamentale Eigenschaften universeller T -Multiplikationseinhüllender im Algebrenfall soll hier nicht näher eingegangen werden (vgl. dazu N. Jacobson [12], S.88/90). Man sieht auch sofort, wie sich alles auf den Tripelsystemfall überträgt. Zur Illustration sei nur kurz die Standardkonstruktion "der" universellen T -Multiplikationseinhüllenden U eines T -Tripelsystems T skizziert :

Seien dazu $\overleftarrow{T \otimes T}$, $\widehat{T \otimes T}$ und $\overrightarrow{T \otimes T}$ drei k -isomorphe Kopien von $T \otimes T$, und sei G die Tensoralgebra über dem k -Vektorraum $\overleftarrow{T \otimes T} \oplus \widehat{T \otimes T} \oplus \overrightarrow{T \otimes T}$.

Zu $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{F}, T)$ sei $\langle \varphi \rangle \in \text{Hom}(G, G)$ der Homomorphismus unitärer assoziativer Algebren, der abbildet :

$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto 1 & \overleftarrow{\text{res}} &\longmapsto \overleftarrow{\varphi(r) \otimes \varphi(s)} \\ \widehat{\text{res}} &\longmapsto \widehat{\varphi(r) \otimes \varphi(s)}, & \overrightarrow{\text{res}} &\longmapsto \overrightarrow{\varphi(r) \otimes \varphi(s)} \end{aligned}$$

für alle $r, s \in \mathbb{F}$.

R bezeichne das von $U \langle \varphi \rangle (\partial T)$ in G erzeugte
 $\varphi \in \text{Hom}(F, T)$

(zweiseitige) Ideal.

Dann ist $U = G/R$ zusammen mit $\lambda, \mu, \varphi \in \text{Hom}_k(T \otimes T, U)$
 definiert durch

$$\lambda(a \otimes b) := \overleftarrow{a \otimes b} \text{ mod } R$$

$$\mu(a \otimes b) := \widehat{a \otimes b} \text{ mod } R \quad \text{für alle } a, b \in T$$

$$\varphi(a \otimes b) := \overrightarrow{a \otimes b} \text{ mod } R$$

universelle T-Multiplikationseinhüllende von T.

Bei dergestalt explizit festgelegter Konstruktion erhält
 man damit "universelle T-Multiplikationsfunktoren" von
 der Kategorie T-Alg k und der Kategorie T-T.S.k in die
 Kategorie der unitären assoziativen k-Algebren.

Falls $A \in \text{T-Alg } k$ bzw. $T \in \text{T-T.S. } k$ fest betrachtet wird,
 bezeichne immer kurze U die A bzw. T funktoriell zugeordnete
 universelle T-Multiplikationseinhüllende,

$\overleftarrow{A}$ und $\overleftarrow{A}$ bzw. $\overleftarrow{T \otimes T}$, $\widehat{T \otimes T}$ und $\overrightarrow{T \otimes T}$ seien

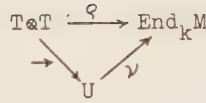
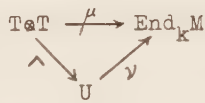
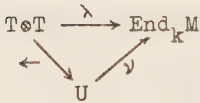
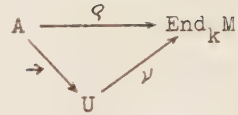
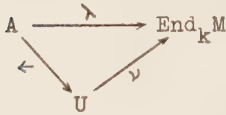
dann die Bildräume von A bzw. $T \otimes T$ in U bei der jeweiligen
 universellen T-Multiplikationsspezialisierung ($\leftarrow, \rightarrow$)
 bzw. ($\leftarrow, \wedge, \rightarrow$) von A bzw. T in U.

Es ist klar, daß auf Grund der universellen Faktorisierungseigenschaft von U die unitären (Links-)Darstellungen von U genau die T-Bidarstellungen von A (im Algebrenfall) bzw. die T-Tridarstellungen von T (im Tripelsystemfall) sind.

Im folgenden werden damit die äquivalenten Kategorien
 der T-Bimoduln der T-Algebra A und der unitären Linksmoduln
 ihrer universellen T-Multiplikationseinhüllenden U als
die Kategorie T-Mod A identifiziert.

Analog werden die äquivalenten Kategorien der T-Trimoduln
 des T-Tripelsystems T und der unitären Linksmoduln seiner
 universellen T-Multiplikationseinhüllenden U als die Kategorie T-Mod T identifiziert.

Gemäß der Situation



werden von nun an folgende Bezeichnungen als gleichwertig verwendet :

$$\overleftarrow{a}.m = \nu(\overleftarrow{a})m = \lambda(a)m = am$$

$$\overrightarrow{a}.m = \nu(\overrightarrow{a})m = \varphi(a)m = ma$$

$$\overleftarrow{a \otimes b}.m = \nu(\overleftarrow{a \otimes b})m = \lambda(a \otimes b)m = [a, b, m]$$

$$\widehat{a \otimes b}.m = \nu(\widehat{a \otimes b})m = \mu(a \otimes b)m = [a, m, b]$$

$$\overrightarrow{a \otimes b}.m = \nu(\overrightarrow{a \otimes b})m = \varphi(a \otimes b)m = [m, a, b]$$

1.3 Varianten und Beispiele.

1.3.1 T-Algebren mit Involution bzw. Automorphismus der Periode 2.

Werde im folgenden immer $\text{char } k \neq 2$ angenommen, und bezeichne $(\mathbf{T}\text{-Alg } k)_\sigma$ die Kategorie der $\mathbf{T}$ -Algebren mit Involution (d.h. Antiautomorphismus der Periode 2).

Zu Objekten (A, σ) , (B, σ) (keine Unterscheidung der Involutionsen in der Bezeichnung !) sei $\text{Hom}((A, \sigma), (B, \sigma))$ die Menge der mit den Involutionsen kommutierenden Algebrenhomomorphismen. Man beachte, daß auch hier ein zum Vergißfunkt

$(\mathbf{T}\text{-Alg } k)_\sigma \longrightarrow \text{Mod } k$ linksadjungierter Funktor existiert, der jedem k -Vektorraum M die freie $\mathbf{T}$ -Algebra mit Involution über M zuordnet (zu deren Konstruktion starte man mit der Menge der Funktionalschemas gebildet aus einem zwei- und einem einstelligen Funktionalsymbol und der Menge M als Menge der Funktionalkonstanten - vgl. Kreisel-Krivine 15, Préliminaires - und fahre dann in herkömmlicher Weise fort).

Werde nun $(A, \sigma) \in /(\mathbf{T}\text{-Alg } k)_\sigma/$ fest betrachtet.

Die Kategorie $\mathbf{T}\text{-Mod}(A, \sigma)$ der $\mathbf{T}$ -Bimoduln mit Involution von (A, σ) definiert sich auf folgende Weise :

Sei dazu U die universelle $\mathbf{T}$ -Multiplikationseinhüllende von A . $U_\sigma = U \circ U_s$ (freier U -Linksmodul mit Basis $1, s$) ist unitäre assoziative Algebra vermöge der Multiplikationsregeln: $s^2 = 1$, $s\bar{a} = \bar{\sigma}as$, $s\bar{a} = \bar{\sigma}as$ für alle $a \in A$ (U wird ja von $\{1\} \cup \bar{A} \cup A$ erzeugt !).

$\mathbf{T}\text{-Mod}(A, \sigma)$ sei dann die Kategorie der unitären U_σ -Linksmoduln.

Jeder unitäre U_σ -Linksmodul (M, σ) kann beschrieben werden als zweiseitiges Ideal einer $\mathbf{T}$ -Algebra mit Involution $(E(A, M), \sigma) = E((A, \sigma), (M, \sigma))$ die (A, σ) als $\mathbf{T}$ -Unteralgebra mit Involution und (M, σ) als dazu k -komplementäres Ideal mit $M^2 = 0$ enthält. Die Involution σ auf M ist das Bild von s bei der gegebenen unitären Darstellung von U_σ .

$\text{Der}((A, \sigma), (M, \sigma))$ ist dann der k -Vektorraum der $d \in \text{Hom}_k(A, M)$, so daß $\text{Graph } d$ eine $\mathbf{T}$ -Unteralgebra mit Involution von $E((A, \sigma), (M, \sigma))$ ist, d.h. derjenigen Derivationen von A in M , die mit den Involutionen kommutieren.

Völlig analog verläuft die Betrachtung der Kategorie $(\mathbf{T}\text{-Alg } k)_\sigma$ der $\mathbf{T}$ -Algebren mit Automorphismus der Periode 2, und für $(A, \sigma) \in /(\mathbf{T}\text{-Alg } k)_\sigma/$ der Kategorie $\mathbf{T}\text{-Mod}(A, \sigma)$ der $\mathbf{T}$ -Bimoduln mit Automorphismus der Periode 2 von (A, σ) .

1.3.2 Die unitäre Variante im Algebrenfall.

Sei $\mathbb{F}$ wieder die syntaktische k -Algebra, und sei $T \in \mathbb{F}$ so beschaffen, daß $T\text{-Alg } k$ nichttriviale Objekte mit Einselement besitzt und abgeschlossen unter Adjunktion von Einselementen ist (klar, was gemeint ist).

Dann bezeichne $(T\text{-Alg } k)_1$ die Kategorie der unitären T -Algebren (die Morphismen bilden die Einselemente aufeinander ab).

Sei nun $A \in (T\text{-Alg } k)_1$ /, dann heißt eine T -Multiplikationsspezialisierung (λ, ρ) von A in eine unitäre assoziative Algebra G unitär, falls $\lambda 1 = \rho 1 = 1$ gilt.

Völlig analog zu den Betrachtungen unter 1.2 ergibt sich dann die Äquivalenz der Begriffe der unitären T -Bidarstellung von A und der unitären (Links-) Darstellung "der" A funktoriell zugeordneten unitären universellen T -Multiplikationseinhüllenden U_1 .

Natürlich läßt sich auch hierauf eine "Theorie mit Involution (bzw. Automorphismus der Periode 2)" aufstocken.

Im Falle der assoziativen, kommutativen - assoziativen und Jordan-Algebren mit 1 wird im folgenden fast ausnahmslos die unitäre Variante betrachtet.

1.3.3 Eine Bemerkung zu allgemeineren algebraischen Systemen.

Betrachtet man die bisher diskutierten Fälle von T -Algebren (eventuell mit Involution oder Automorphismus der Periode 2), T -Tripelsystemen und den zuallererst nicht ganz in unser Schema passende Fall der p -Lie-Algebren (vgl. etwa N. Jacobson [11] oder B. Pareigis [21]), so sieht man unschwer, wie sich alles das in folgenden allgemeineren Rahmen einordnet :

Sei wieder k ein Körper.

Die Menge des Funktionalschemas (vgl. Kreisel-Krivine [15], Préliminaires), gebildet aus einem abzählbar unendlichen Alphabet von Funktionalkonstanten und endlich vielen vorgegebenen Funktionalsymbolen

$\sigma_1, \dots, \sigma_k$ (σ_i jeweils n_i -stellig für $n_i \geq 1$, $1 \leq i \leq k$),

werde interpretiert als k -Basis eines k -Vektorraumes F , wobei natürlich jedes vorkommende n_i -stellige Funktionalsymbol σ_i eine k -lineare Abbildung $\hat{\sigma}_i: \otimes^{n_i} F \rightarrow F$ induziert.

F heie dann syntaktische k -Algebra vom Typ $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$.

Es ist dann klar, wie die Kategorie der k -Algebren vom Typ $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ zu definieren ist.

Für $T \subset F$ ergibt sich dann die Kategorie der T -Algebren vom Typ $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ über k analog früheren Vorgehen. Alle im Rahmen dieser Arbeit betrachteten Algebren- oder Tripelsystemkategorien sind natürlich in diesem Sinne Kategorien von T -Algebren des Typs (σ, μ, τ) - σ ein 1-stelliges, μ ein 2-stelliges und τ ein 3-stelliges Funktionalsymbol.

Man sieht ohne allzugroße Schwierigkeiten, daß sich alle bisher skizzierten darstellungstheoretischen Überlegungen auch in diesem etwas allgemeineren Rahmen durchführen lassen.

Obwohl in der Folge nur Algebren- und Tripelsystemfall explizit behandelt werden, ist aus der Parallelführung und dem Hinweis auf die Varianten immer erkennbar, daß und in welcher Weise es sich im eigentlichen um eine Theorie von Algebren höheren gemischten Typs handelt und daß und wie alle Ergebnisse sinngemäß dafür formuliert und bewiesen werden können.

1.3.4 Hinweise zu Beispielen.

(i) Unitäre assoziative Algebren.

Sei A eine unitäre assoziative Algebra, A^0 ihre duale Kopie (mit gegenläufiger Multiplikation). Dann kann $A \otimes A^0$ (mit $\overleftarrow{A} = A \otimes 1$, $\overrightarrow{A} = 1 \otimes A^0$) als "die" unitäre universelle assoziative Multiplikationseinhüllende von A aufgefaßt werden.

(ii) Unitäre kommutative und assoziative Algebren.

Sei A eine unitäre kommutative und assoziative Algebra; dann läßt sich A mit ihren unitären universellen kommutativen und assoziativen Multiplikationseinhüllenden identifizieren.

(iii) Lie-Algebren.

Zur Diskussion der wesentlichsten Eigenschaften der universellen Lie-Multiplikationseinhüllenden U einer Lie-Algebra A sei auf N. Jacobson [11] verwiesen.

(iv) Jordan-Algebren.

Hier gibt N. Jacobson [12] hinreichend Auskunft über Struktur und Eigenschaften (unitärer) universeller Jordan-Multiplikationseinhüllender von Jordan-Algebren.

(v) Jordan-Tripelsysteme.

O. Loos diskutiert in [16] einige mit Nilpotenzfragen zusammenhängende Eigenschaften universeller Jordan-Multiplikationseinhüllender von Jordan-Tripelsystemen.

2. Singuläre Erweiterungen von nichtassoziativen Algebren und Tripelsystemen.

In diesem Abschnitt soll das Material bereitgestellt werden, das für Fragen erweiterungstheoretischer Interpretationen der später noch zu definierenden Kohomologieräume relevant ist. Die Analogie zu Überlegungen und Techniken im Modulfall liegt in der Natur der Sache; es sei daher vor allem neben der Dissertation [8] von N. Glassman auf die Bücher [10] von P.J. Hilton-U. Stambach und [19] von S. MacLane als Hauptreferenzen verwiesen.

2.1 Einfache singuläre T-Erweiterungen, T-Faktorsysteme und generische T-Erweiterungen.

2.1.1 Einfache singuläre T-Erweiterungen.

Eine kurze exakte Folge $0 \longrightarrow K \hookrightarrow B \xrightarrow{\varphi} A \longrightarrow 0$ von T-Algebren heißt T-Nullerweiterung von A (durch K), falls für $K = \ker \varphi$ $K^2 = 0$ gilt.

Es existiert immer ein k-linearer Schnitt $\alpha \in \text{Hom}_k(A, B)$ mit $\varphi\alpha = 1_A$; kann $\alpha \in \text{Hom}(A, B)$, also als Algebrenschnitt gewählt werden, so heißt die T-Nullerweiterung von A (durch K) zerfallend.

Seien L und R die Operatoren der Links- und Rechtsmultiplikation in B, dann ist K mittels der T-Bidarstellung $(L\alpha, R\alpha)$ (Einschränkung des Bildes auf $\text{End}_k K$) T-Bimodul von A, d.h. es gilt explizit :

$$\begin{aligned} a\alpha &= \alpha(a)n & a \in A \\ n\alpha &= n\alpha(a) & n \in K \end{aligned}$$

Diese T-Bimodulstruktur ist unabhängig von der Wahl des k-linearen Schnitts α (mit $\varphi\alpha = 1_A$).

Völlig analog werden T-Nullerweiterungen

$0 \longrightarrow K \hookrightarrow V \xrightarrow{\varphi} T \longrightarrow 0$ eines T-Tripelsystems T definiert (d.h. es muß gelten: $[V, K, K] = [K, V, K] = [K, K, V] = 0$).

Auch hier kann dann K als T-Trimodul von T (via k-linearen Schnitt und unabhängig von dessen Wahl) aufgefaßt werden.

Sei nun wieder $A \in \text{T-Alg } k/$, $M \in \text{T-Mod } A/$.

Eine exakte Folge $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\psi} B \xrightarrow{\varphi} A \longrightarrow 0$ heißt

einfache singuläre T-Erweiterung von A durch M, falls gilt:

- (i) Sei $K = \text{Ker } \varphi$, dann ist $0 \longrightarrow K \hookrightarrow B \xrightarrow{\varphi} A \longrightarrow 0$
eine T-Nullerweiterung von A durch K
- (ii) $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\psi} K \longrightarrow 0$ ist exakt in $\mathbf{T}\text{-Mod } A$

Analog definiert sich für $\mathbf{T} \in \mathbf{T}\text{-T.S.k/}$ und $M \in \mathbf{T}\text{-Mod } \mathbf{T/}$
der Begriff der einfachen singulären T-Erweiterung von
T durch M.

Im Algebrenfall (und wörtlich genauso im Tripelsystemfall)
heißen zwei einfache singuläre T-Erweiterungen
 $0 \longrightarrow M \longrightarrow B \xrightarrow{\varphi} A \longrightarrow 0$ und $0 \longrightarrow M \longrightarrow B' \xrightarrow{\varphi'} A \longrightarrow 0$
von A durch M äquivalent, falls $\forall \psi \in \text{Hom}(B, B')$ existiert,
so daß folgendes Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\varphi} & A \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow 1 & & \downarrow \psi & & \downarrow 1 \\ 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & B' & \xrightarrow{\varphi'} & A \longrightarrow 0 \end{array}$$

ψ ist dann notwendig ein Isomorphismus von T-Algebren,
und die so erklärte Relation ist eine Äquivalenzrelation
auf der Klasse der einfachen singulären T-Erweiterungen
von A durch M.

Zu $A \in \mathbf{T}\text{-Alg } k/$ und $M \in \mathbf{T}\text{-Mod } A/$ bezeichne

$1\text{-Ext}(A, M)$ die Menge der Äquivalenzklassen einfacher
singulärer T-Erweiterungen von A durch M.

Analog bezeichne zu $\mathbf{T} \in \mathbf{T}\text{-T.S.k/}$ und $M \in \mathbf{T}\text{-Mod } \mathbf{T/}$

$1\text{-Ext}(\mathbf{T}, M)$ die Menge der Äquivalenzklassen einfacher
singulärer T-Erweiterungen von T durch M.

$1\text{-Ext}(A, M)$ bzw. $1\text{-Ext}(\mathbf{T}, M)$ trägt in verhältnismäßig ange-
nehm beschreibbarer Weise die Struktur eines k-Vektorraums,
und $1\text{-Ext}(A, -)$ bzw. $1\text{-Ext}(\mathbf{T}, -)$ kann damit als additiver
kovarianter Funktor von $\mathbf{T}\text{-Mod } A$ bzw. $\mathbf{T}\text{-Mod } \mathbf{T}$ in $\text{Mod } k$ be-
trachtet werden.

Die gewünschten k-Vektorraumstrukturen erhält man nun auf
folgende Weise :

a) Der Algebrenfall :

Sei also $A \in /T\text{-Alg } k/$ und $M \in /T\text{-Mod } A/$.

Zu $h \in \text{Hom}_k(A \otimes A, M)$ bezeichne $E_h(A, M)$ die k -Algebra, die entsteht, wenn auf $A \otimes M$ die Multiplikation $(a \otimes m)(b \otimes n) := ab \otimes an + mb + h(a \otimes b)$ definiert wird. Insbesondere gilt also $E_0(A, M) = E(A, M)$.

M ist Ideal von $E_h(A, M)$, und es gilt $M^2 = 0$; jedoch ist A im allgemeinen nicht mehr Unter algebra.

h heißt nun T-Faktorsystem von A in M genau dann, wenn $E_h(A, M)$ wieder T -Algebra über k ist.

Die Identitäten, denen h somit genügen muß, lassen sich ähnlich wie bei den T -Bidarstellungen recht mechanisch bestimmen:

Sei dazu F die syntaktische k -Algebra und $\eta \in \text{Hom}(F, A)$.

Dann wird $h(\eta) \in \text{Hom}_k(F, M)$ folgendermaßen rekursiv (natürliche Filtrierung von F !) definiert :

$$h(\eta)x_i = 0$$

$$h(\eta)r = (\eta r_1)h(\eta)r_2 + h(\eta)r_1(\eta r_2) + h(\eta r_1 \otimes \eta r_2) \\ \text{falls } r = r_1 r_2 \text{ ein Monom vom Grad } \geq 2 \text{ ist.}$$

Es gilt dann: h T -Faktorsystem von A in M

$$h(\eta)(T) = 0 \text{ für alle } \eta \in \text{Hom}(F, A).$$

(vgl. dazu N. Jacobson [12], S.91/93).

Die in den klassischen Algebrenfllen geltenden T -Faktorsystemidentitten findet man in N. Jacobson [12], S.94, ausgerechnet.

Ein T -Faktorsystem h von A in M heißt trivial, falls $j \in \text{Hom}_k(A, M)$ existiert, so daß

$$h(a \otimes b) = j(ab) - aj(b) - j(a)b \text{ für alle } a, b \in A.$$

$\text{Opext}(A, M)$ bezeichne den Quotientenraum des Raumes der T -Faktorsysteme von A in M nach dem Unterraum der trivialen T -Faktorsysteme von A in M .

$\text{Opext}(A, -)$ kann dann als additiver kovarianter Funktor von $T\text{-Mod } A$ in $\text{Mod } k$ aufgefaßt werden.

Bezeichne nun zu einem T -Faktorsystem h von A in M $E_h(A, M)$ auch die einfache singuläre T -Erweiterung

$O \longrightarrow M \xleftrightarrow{\quad} E_h(A, M) \longrightarrow A \longrightarrow O$ von A durch M , so induziert die Zuordnung $h \mapsto E_h(A, M)$ eine Bijektion $\text{Opext}(A, M) \longrightarrow 1\text{-Ext}(A, M)$ die funktoriell in M ist und vermöge derer $1\text{-Ext}(A, -)$ als additiver kovarianter Funktor von $\mathbf{T}\text{-Mod } A$ in $\text{Mod } k$ aufgefaßt werden kann.

b) Tripelsystemfall

Auch hier kann die Menge der Äquivalenzklassen einfacher singulärer $\mathbf{T}$ -Erweiterungen eines $\mathbf{T}$ -Tripelsystems T durch einen $\mathbf{T}$ -Trimodul M von T analog zum Algebrenfall in der Form $\text{Opext}(T, M)$ als k -Vektorraum beschrieben werden, wodurch $1\text{-Ext}(T, -)$ ein additiver kovarianter Funktor von $\mathbf{T}\text{-Mod } T$ in $\text{Mod } k$ wird.

Im Detail sei also zu $h \in \text{Hom}_k(T \otimes T \otimes T, M)$ $E_h(T, M)$ das k -Tripelsystem, das entsteht, wenn auf $T \otimes M$ die k -trilineare Verknüpfung

$$[a \otimes m, b \otimes n, c \otimes p] := [a, b, c] \otimes [a, b, p] + [a, n, c] \otimes [m, b, c] + h(a \otimes b \otimes c)$$

definiert wird.

h heißt dann wieder $\mathbf{T}$ -Faktorsystem von T in M , falls $E_h(T, M) \in /T\text{-T.S.}/k$ gilt.

Auch hier bestimmen sich die Identitäten, denen h als $\mathbf{T}$ -Faktorsystem genügen muß, auf ähnlich einfache Weise wie im Algebrenfall :

Sei F das syntaktische k -Tripelsystem, $\eta \in \text{Hom}(F, T)$.

$h(\eta) \in \text{Hom}_k(F, M)$ definiert man folgendermaßen :

$$h(\eta) x_1 := 0$$

$$h(\eta)^r := [h(\eta)^{r_1}, \eta^{r_2}, \eta^{r_3}] + [\eta^{r_1}, h(\eta)^{r_2}, \eta^{r_3}] + [\eta^{r_1}, \eta^{r_2}, h(\eta)^{r_3}] + h(\eta^{r_1} \otimes \eta^{r_2} \otimes \eta^{r_3})$$

falls $r = [r_1, r_2, r_3]$ gilt.

Dann ergibt sich wie im Algebrenfall :

h $\mathbf{T}$ -Faktorsystem von T in $M \iff$

$h(\eta)(T) = 0$ für alle $\eta \in \text{Hom}(F, T)$.

Für den Fall der Lie-Tripelsysteme und den der Jordan-Tripelsysteme erhält man z.B. folgende Identitäten :

(i) Lie Tripelsysteme :

$$h(a \otimes b) = 0$$

$$h(a \otimes b \otimes c) + h(b \otimes c \otimes a) + h(c \otimes a \otimes b) = 0$$

$$\begin{aligned} h(a \otimes b [x, y, z]) + [a, b, h(x \otimes y \otimes z)] = \\ h([a, b, x] \otimes y \otimes z) + [h(a \otimes b \otimes x), y, z] + \\ h(x \otimes [a, b, y] \otimes z) + [x, h(a \otimes b \otimes y), z] + \\ h(x \otimes y \otimes [a, b, z]) + [x, y, h(a \otimes b \otimes z)] \end{aligned}$$

(ii) Jordan-Tripelsysteme

$$h(x \otimes y \otimes z) = h(z \otimes y \otimes x)$$

$$\begin{aligned} h(x \otimes y \otimes [u, v, w]) + [x, y, h(u \otimes v \otimes w)] - \\ h([x, y, u] \otimes v \otimes w) - [h(x \otimes y \otimes u), v, w] + \\ h(u \otimes [y, x, v] \otimes w) + [u, h(y \otimes x \otimes v), w] - \\ -h(u \otimes v \otimes [x, y, w]) - [u, v, h(x \otimes y \otimes w)] = 0 \end{aligned}$$

Ein T-Faktorsystem h von T in M heißt trivial falls $\gamma \in \text{Hom}_k(T, M)$ existiert, so daß

$$\begin{aligned} h(a \otimes b \otimes c) = \gamma([a, b, c]) - [\gamma(a), b, c] - [a, \gamma(b), c] \\ - [a, b, \gamma(c)] \quad \text{für alle } a, b, c \in T \end{aligned}$$

gilt.

wieder bezeichne $\text{Opext}(T, M)$ den Quotientenraum des Raumes der T-Faktorsysteme von T in M nach dem Unterraum der trivialen T-Faktorsysteme von T in M .

Alles Weitere verläuft in völliger Analogie zum Algebrenfall.

Es dürfte klar sein, daß (und wie) sich im Algebrenfall die angegebenen Begriffe und Beziehungen auf die Theorie mit Involution bzw. Automorphismus der Periode 2 und die unitären Varianten übertragen.

Die Existenz von mit den Involutionen (Automorphismen der Periode 2) kommutierenden k -linearen Schnitten ist dabei wegen der Halbeinfachheit der Gruppenalgebra $k\mathbb{Z}_2$ ($\text{char } k \neq 2$!) sichergestellt.

In welcher Weise die $\mathbf{T}$ -Faktorsysteme mit den Involutionen (Automorphismus der Periode 2) "kommutieren" müssen, ist wohl auch klar.

2.1.2 Generische $\mathbf{T}$ -Erweiterungen.

Eine $\mathbf{T}$ -Nullerweiterung $0 \longrightarrow N \hookrightarrow F \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$ der $\mathbf{T}$ -Algebra A heißt generische $\mathbf{T}$ -Erweiterung von A , falls zu jeder $\mathbf{T}$ -Nullerweiterung

$0 \longrightarrow K \hookrightarrow B \xrightarrow{\varphi} A \longrightarrow 0$ von A ein $\mu \in \text{Hom}(F, B)$ existiert, so daß folgendes Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \hookrightarrow & F & \xrightarrow{\pi} & A \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \mu & & \downarrow \mu & & \downarrow 1 \\ 0 & \longrightarrow & K & \hookrightarrow & B & \xrightarrow{\varphi} & A \longrightarrow 0 \end{array}$$

Eine generische $\mathbf{T}$ -Erweiterung von A erlaubt also zu jeder einfachen singulären $\mathbf{T}$ -Erweiterung

$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\psi} B \xrightarrow{\varphi} A \longrightarrow 0$ von A eine Fortsetzung von γ_A zu einem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \hookrightarrow & F & \xrightarrow{\pi} & A \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow \mu & & \downarrow 1 \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\psi} & B & \xrightarrow{\varphi} & A \longrightarrow 0 \end{array}$$

mit $\mu \in \text{Hom}(F, B)$, $f \in \text{Hom}_u(N, M)$.

Völlig analog wird der Begriff der generischen $\mathbf{T}$ -Erweiterung eines $\mathbf{T}$ -Tripelsystems T definiert.

Konstruktion einer kanonischen generischen $\mathbf{T}$ -Erweiterung zu vorgegebener $\mathbf{T}$ -Algebra A bzw. vorgegebenem $\mathbf{T}$ -Tripelsystem T :

Sei dazu $\bar{F}$ die freie $\mathbf{T}$ -Algebra über dem Vektorraum A bzw. das freie $\mathbf{T}$ -Tripelsystem über dem Vektorraum T , und sei $0 \longrightarrow \bar{N} \hookrightarrow \bar{F} \xrightarrow{\bar{\pi}} A \longrightarrow 0$ bzw. $0 \longrightarrow \bar{N} \hookrightarrow \bar{F} \xrightarrow{\bar{\pi}} T \longrightarrow 0$ die durch γ_A bzw. γ_T induzierte exakte Folge von $\mathbf{T}$ -Algebren bzw. $\mathbf{T}$ -Tripelsystemen. Bezeichne $\bar{N}^2$ das von $\bar{N} \cdot \bar{N}$ im Algebrenfall bzw. von $[\bar{N}, \bar{N}, \bar{F}] + [\bar{N}, \bar{F}, \bar{N}] + [\bar{F}, \bar{N}, \bar{N}]$ im Tripelsystemfall erzeugte Ideal von $\bar{F}$, und sei $F = \bar{F} / \bar{N}^2$. Dann wird kanonisch eine $\mathbf{T}$ -Nullerweiterung $0 \longrightarrow N \hookrightarrow F \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$ bzw.

$0 \longrightarrow N \hookrightarrow F \xrightarrow{\pi} T \longrightarrow 0$ induziert, und diese ist generisch.

Die Varianten im Algebrenfall stellen keine weiteren Probleme.

Man beachte, daß ein T -Faktorsystem g von A bzw. T in N existiert, so daß $E_g(A, N)$ bzw. $E_g(T, N)$ generische T -Erweiterung von A bzw. T ist.

g ist dann generisches T -Faktorsystem von A bzw. T in folgendem Sinne :

Sei h ein beliebiges T -Faktorsystem von A bzw. T in einen T -Bimodul bzw. T -Trimodul M von A bzw. T , dann gibt es immer ein $f \in \text{Hom}_U(N, M)$, so daß $h \circ f g$ trivial ist.

Auch hier überträgt sich alles sinngemäß auf die Varianten im Algebrenfall.

2.2 n -fache singuläre Erweiterungen

2.2.1 Kohomologie von unitären Linksmoduln einer unitären assoziativen k -Algebra U .

Sei U eine unitäre assoziative Algebra über dem Körper k .

Als Kohomologietheorie von unitären U -Linksmoduln soll im folgenden immer die Theorie der exakt verbundenen Folge $(\text{Ext}_U^n(-, -))_{n \geq 0}$ der rechtsabgeleiteten Funktoren des Hom_U -Funktors (mit Werten in $\text{Mod } k$) verstanden werden; dabei wird das Material aus Cartan-Eilenberg [4], Kapitel V und VI, sowie Hilton-Stammbach [10], Kapitel III und IV, und Mac Lane [19], Kapitel II und III, als bekannt vorausgesetzt.

Ein besonderer Nachdruck wird in der Folge auf die Yoneda-Interpretation der Kohomologieräume gelegt werden; in diesem Sinne bezeichne zu $M, N \in \text{Mod } U/$ und für $n \geq 1$ $n\text{-Ext}(M, N)$ den k -Vektorraum der Äquivalenzklassen n -facher singulärer Erweiterungen von M durch N mit der durch die bekannte natürliche Äquivalenz von mengenwertigen Bifunktoren

$$n\text{-Ext}(-, -) \simeq \text{Ext}_U^n(-, -)$$

induzierten k -Vektorraumstruktur (vgl. Hilton-Stammbach [10], IV.9, S.148 ff.).

Eine technische Bemerkung erscheint im Hinblick auf später

vorkommende Schlußweisen noch angebracht :

Berechnung von $\text{Ext}_U^n(M, N)$ mittels der Bar-Auflösung von M:

Sei dazu $U_0(M) := M$

$$U_n(M) := U \otimes U_{n-1}(M) \quad , \quad n \geq 1$$

$U_n(M)$ ist für $n \geq 1$ U-projektiver U-Linksmodul (Multiplikation im ersten Faktor).

Für $n \geq 0$ werde $s_n \in \text{Hom}_K(U_n(M), U_{n+1}(M))$ definiert durch

$$s_n(x) := 1 \otimes x$$

Es ergibt sich folgende U-projektive Auflösung (die Bar-Auflösung) von M :

$$\dots \longrightarrow U_n(M) \xrightarrow{d_n} U_{n-1}(M) \longrightarrow \dots \longrightarrow U_1(M) \xrightarrow{d_1} M \longrightarrow 0$$

wobei $d_1(u \otimes m) = um$

und $d_{n+1}s_n + s_{n-1}d_n = 1_{U_n(M)}$, $n \geq 1$, gelte.

Durch diese Rekursionsgleichungen sind die d_n eindeutig bestimmt, und da explizit gilt :

$$d_n(u_1 \otimes \dots \otimes u_n \otimes m) = \sum_{1 \leq i \leq n} (-1)^{i+1} u_1 \otimes \dots \otimes u_i u_{i+1} \otimes \dots \otimes m$$

sind es auch U-Homomorphismen; die Exaktheit wird durch explizite Form und Rekursionsgleichungen geliefert.

Mittels der so beschriebenen Bar-Auflösung von M berechnet sich $\text{Ext}_U^n(M, N)$ dann als n-ter Kohomologieraum des Kokettenkomplexes

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_U(U_1(M), N) \longrightarrow \text{Hom}_U(U_2(M), N) \longrightarrow \dots$$

d.h. $(\text{Hom}_U(U \otimes A, B) \simeq \text{Hom}_K(A, B) !)$

von

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_K(M, N) \xrightarrow{\partial} \text{Hom}_K(U \otimes M, N) \xrightarrow{\partial} \dots$$

mit dem Differential

$$\begin{aligned} (\partial f)(u_1 \otimes \dots \otimes u_n \otimes m) &= u_1 f(u_2 \otimes \dots \otimes u_n \otimes m) \\ &+ \sum_{1 \leq i \leq n} (-1)^i f(u_1 \otimes \dots \otimes u_i u_{i+1} \otimes \dots \otimes m) \end{aligned}$$

Insbesondere erhält man $\text{Ext}_U^1(M, N) = Z^1(M, N) / B^1(M, N)$

wobei gilt :

$$\begin{aligned} g &\in Z^1(M, N) & ug(vom) - g(uvom) + g(uovm) &= 0 \\ f &\in B^1(M, N) & \text{es gibt } f' \in \text{Hom}_K(M, N) & \text{ mit} \\ & & f(uom) &= uf'(m) - f'(um). \end{aligned}$$

Bezeichne zu $g \in Z^1(M, N)$ $E_g(M, N)$ den unitären U-Linksmodul, den man erhält, wenn man U auf der k-direkten Summe $M \oplus N$ vermöge $u(m \oplus n) := um \oplus un + g(uom)$ operieren läßt, und werde auch die einfache singuläre Erweiterung

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow E_g(M, N) \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

von M durch N mit $E_g(M, N)$ bezeichnet, so induziert die Zuordnung $g \longmapsto E_g(M, N)$ den oben erwähnten funktoriellen Isomorphismus

$$\text{Ext}_U^1(M, N) \simeq 1\text{-Ext}(M, N)$$

2.2.2 n-fache singuläre T-Erweiterungen

Die nunmehr folgenden Überlegungen sind nur für den Algebrenfall formuliert; man sieht ohne Schwierigkeiten, daß sowohl Tripelsystemfall als auch die Varianten im Algebrenfall bis auf leichte begriffliche Modifikationen völlig analog zu betrachten sind.

Sei also A eine T-Algebra, U ihre universelle T-Multiplikationseinhüllende und M ein T-Bimodul von A.

Eine exakte Folge

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\psi} X_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow X_1 \longrightarrow B \xrightarrow{\varphi} A \longrightarrow 0$$

heißt n-fache singuläre T-Erweiterung von A durch M

($n \geq 1$, für $n = 1$ gemäß 2.1.1 zu interpretieren), falls

$$(i) \quad 0 \longrightarrow K \hookrightarrow B \xrightarrow{\varphi} A \longrightarrow 0 \quad (K = \text{Ker } \varphi)$$

T-Nullerweiterung von A

$$(ii) \quad 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\psi} X_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow X_1 \longrightarrow K \longrightarrow 0$$

eine exakte Folge von U-Linksmoduln (d.h. eine (n-1)-fache singuläre Erweiterung des U-Moduls K durch den U-Modul M) ist.

Der Fall $n = 1$ (einfache singuläre T-Erweiterungen) wurde bereits diskutiert.

Ein Homomorphismus n -facher singulärer T -Erweiterungen von A durch M (mit festen Enden) ist gegeben durch ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\gamma} & X_{n-1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\varphi} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow 1 & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \mu & & \downarrow & & \downarrow 1 \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\gamma'} & X'_{n-1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & X'_1 & \longrightarrow & B' & \xrightarrow{\varphi'} & A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

von U -Homomorphismen (mit $\mu \in \text{Hom}(B, B')$).

Zwei n -fache singuläre T -Erweiterungen von A durch M heißen fest verbunden, falls sie einen Homomorphismus n -facher singulärer T -Erweiterungen mit festen Enden erlauben.

$n\text{-Ext}(A, M)$ bezeichne (für $n \geq 1$) die Menge der Äquivalenzklassen n -facher singulärer T -Erweiterungen von A durch M , wobei die Äquivalenzrelation auf der Klasse der n -fachen singulären T -Erweiterungen von A durch M durch die Relation des Festverbundenseins erzeugt wird.

In herkömmlicher Weise - man vergleiche die Argumentation im Modulfall - ist dadurch zuerst einmal für jedes $n \geq 1$ ein mengenwertiger kovarianter Funktor $n\text{-Ext}(A, -)$ auf $T\text{-Mod } A$ definiert.

Für den Fall $n = 1$ wurde bereits gezeigt, daß und wie $1\text{-Ext}(A, -)$ als kovarianter additiver Funktor von $T\text{-Mod } A$ in $\text{Mod } k$ aufgefaßt werden kann.

Dies soll nun auch für $n \geq 2$ sichergestellt werden.

Dazu einige Vorüberlegungen :

Eine (eventuell unendliche) exakte Folge

$$\dots \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_1 \longrightarrow F \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$$

heißt globale generische T -Erweiterung der T -Algebra A falls

$$(i) \quad 0 \longrightarrow N \hookrightarrow F \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0 \quad (N = \text{Ker } \pi)$$

T - Nullerweiterung von A

$$(ii) \quad \dots \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_1 \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

eine exakte Folge von U -Moduln ist, und

(iii) für jedes $n \geq 1$ und jede n -fache singuläre T -Erweiterung von A durch einen T -Bimodul M von A ein Homomorphismus exakter Folgen

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & P_n & \longrightarrow & P_{n-1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & F & \xrightarrow{\pi} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f_n & & \downarrow & & & & \downarrow f_1 & & \downarrow \mu & & \downarrow 1 & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & X_{n-1} & \longrightarrow & \dots & & X_1 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\varphi} & A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

existiert (die $f_i, 1 \leq i \leq n$, U -Homomorphismen, $\mu \in \text{Hom}(F, B)$).

Die Existenz globaler generischer T -Erweiterungen sieht man verhältnismäßig leicht ein :

Sei $0 \longrightarrow N \hookrightarrow F \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$ die kanonische generische T -Erweiterung von A , und sei

$$\dots \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_1 \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

eine U -projektive Auflösung von N (z.B. die oben erwähnte Bar-Auflösung von N); dann ist

$$\dots \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_1 \longrightarrow F \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$$

eine globale generische T -Erweiterung von A .

Sei jetzt eine kanonisch konstruierte globale generische T -Erweiterung von A fest gegeben.

Dann gilt :

Sei $n \geq 2$. Dann ist jede n -fache singuläre T -Erweiterung von A durch einen T -Bimodul M von A äquivalent zu einer n -fachen singulären T -Erweiterung von A durch M der Gestalt

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\gamma} E \longrightarrow P_{n-2} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_1 \longrightarrow F \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$$

(d.h. der Unterschied n -facher singulärer T -Erweiterungen von A durch M modulo Äquivalenz "liegt gleich hinter M ").

Man betrachte dazu die Situation

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & P_n & \xrightarrow{d_n} & P_{n-1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & F & \xrightarrow{\pi} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & & & \downarrow & & \downarrow \mu & & \downarrow 1 & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & X_{n-1} & \longrightarrow & \dots & & X_1 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\varphi} & A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

und setze $E = M \oplus P_{n-1} / \{ (f_n x, -d_n x), x \in P_n \}$.

Der Rest ist dann klar (vgl. auch Mac Lane [19], Cor.6.5., S.90).

Eine n -fache singuläre T -Erweiterung von A durch M der Form

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} E \longrightarrow P_{n-2} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_1 \longrightarrow F \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$$

heiße Normalrepräsentant für die entsprechende Äquivalenzklasse.

Die Normalrepräsentierbarkeit formuliert sich in schärferer Form folgendermaßen :

Sei $n \geq 2$ und sei $K_{n-2} = \text{Ker } d_{n-2}$ in unserer fest betrachteten globalen generischen T -Erweiterung von A . Dann gibt es eine natürliche Äquivalenz mengenwertiger Funktoren $n\text{-Ext}(A, -) \simeq 1\text{-Ext}(K_{n-2}, -)$, vermöge derer $n\text{-Ext}(A, -)$ als kovarianter additiver Funktor von $T\text{-Mod } A$ in $\text{Mod } k$ aufgefaßt werden kann.

Dazu beachte man folgendes :

Für jedes $M \in T\text{-Mod } A/$ sind die zueinander inversen Abbildungen $n\text{-Ext}(A, M) \longrightarrow 1\text{-Ext}(K_{n-2}, M)$ und $1\text{-Ext}(K_{n-2}, M) \longrightarrow n\text{-Ext}(A, M)$ induziert durch folgende Zuordnungen :

(α) Bilde zu n -facher singulärer T -Erweiterung von A durch M einen Normalrepräsentanten und trenne das relevante Endstück $0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow K_{n-2} \longrightarrow 0$ ab.

(β) Setze die einfache singuläre Erweiterung

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow K_{n-2} \longrightarrow 0 \text{ von } K_{n-2} \text{ durch } M \text{ und} \\ 0 \longrightarrow K_{n-2} \longrightarrow P_{n-2} \longrightarrow \dots \longrightarrow F \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0 \\ \text{zusammen.} \end{aligned}$$

Die einzige Schwierigkeit besteht darin einzusehen, daß der Prozeß (α) äquivalenzstabil ist, also eine Abbildung induziert.

Seien also zwei äquivalente n -fache singuläre T -Erweiterungen S_1 und S_2 von A durch M gegeben, und bezeichnen $f_n, g_n : P_n \longrightarrow M$ durch S_1 bzw. S_2 induzierte n -te Komponenten von Fortsetzungen von 1_A .

Dann gibt es $h_n \in \text{Hom}_U(P_{n-1}, M)$ mit $f_n - g_n = h_n d_n$ (vgl. dazu N. Glassman [8], Lemma 9, S. 25). Betrachte den U -Homomorphismus von $M \oplus P_{n-1}$ in $M \oplus P_{n-1}$, der (x, y) auf $(x + h_n(y), y)$ abbildet; dann wird dadurch ein U -Homomorphismus

induziert, so daß das folgende Diagramm kommutativ ist

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M \oplus P_{n-1} / \{ (f_n x, -d_n x), x \in P_n \} & \longrightarrow & K_{n-2} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \scriptstyle \textstyle 1 & & \downarrow & & \downarrow \scriptstyle \textstyle 1 \\
 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M \oplus P_{n-1} / \{ (f_n x, -d_n x), x \in P_n \} & \longrightarrow & K_{n-2} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

und damit fertig.

Es sei darauf hingewiesen, daß die analoge funktorielle Isomorphie im Modulfall natürlich viel eleganter vermöge Argumentation über iteriertenverbindenden Homomorphismus (vgl. Cartan-Eilenberg [4], S.44) einzusehen ist.

Als einfache Folgerung des oben beschriebenen Sachverhalts ergibt sich :

Sei $n \geq 2$. Dann existiert eine natürliche Äquivalenz

$$n\text{-Ext}(A, -) \simeq \text{Ext}_u^{n-1}(N, -)$$

von additiven kovarianten Funktoren (mit Werten in $\text{Mod } k$) induziert durch die funktoriellen Isomorphismen

$$\begin{aligned}
 n\text{-Ext}(A, -) &\simeq 1\text{-Ext}(K_{n-2}, -) \\
 1\text{-Ext}(K_{n-2}, -) &\simeq \text{Ext}_u^1(K_{n-2}, -) \\
 \text{Ext}_u^1(K_{n-2}, -) &\simeq \text{Ext}_u^{n-1}(N, -)
 \end{aligned}$$

(N natürlich der Kern der generischen T -Erweiterung von A).

3. Der Derivationsfunktork.

Das in diesem Abschnitt darzustellende Material liefert die fundamentalen Zusammenhänge, auf denen die spezifischen Eigentümlichkeiten der im weiteren zu diskutierenden Kohomologietheorie beruhen. Der zentrale Begriff der abgeleiteten Modulfolge einer T -Nullerweiterung hat ein (allerdings unter anderen Gesichtspunkten ausgewertetes) Pendant in gruppentheoretischen Techniken der Knotentheorie; man vergleiche dazu den Artikel [5] von R.H. Crowell.

3.1 Darstellbarkeit des Derivationsfunktors in der einschlägigen Modulkategorie.

3.1.1 Der abgeleitete Modul eines Homomorphismus.

Zuerst werde der Algebrenfall betrachtet.

Sei also $\varphi \in \text{Hom}(B, A)$ ein Homomorphismus von T -Algebren, $U(\varphi) \in \text{Hom}(U(B), U(A))$ der durch den universellen T -Multiplikationsfunktork zugeordnete Homomorphismus unitärer assoziativer Algebren, dann induziert jede unitäre Darstellung ν von $U(A)$ eine unitäre Darstellung $\nu U(\varphi)$ von $U(B)$, d.h. jeder T -Bimodul M von A wird (modulo φ) zu einem T -Bimodul M_φ von B ; explizit gilt :

$$\begin{aligned}bm &= \varphi(b)m & m \in M \\mb &= m\varphi(b) & b \in B\end{aligned}$$

Sei $\text{Der}_\varphi(B, M) = \text{Der}(B, M_\varphi)$ der k -Vektorraum der Derivationen von B in M_φ ; für $d \in \text{Der}_\varphi(B, M)$ gilt also :

$$d(b_1 b_2) = \varphi(b_1) d b_2 + d b_1 \varphi(b_2), \quad b_1, b_2 \in B.$$

$\text{Der}_\varphi(B, -)$ kann also als additiver kovarianter Funktork von $T\text{-Mod } A$ in $\text{Mod } k$ aufgefaßt werden.

Sei zu $M \in /T\text{-Mod } A/$ $\iota \in \text{Hom}(A, E(A, M))$ die kanonische Injektion von A in $E(A, M)$, und zu $d \in \text{Hom}_k(B, M)$ bezeichne (φ, d) die Abbildung

$$\iota\varphi + d \in \text{Hom}_k(B, E(A, M)).$$

Dann gilt : $d \in \text{Der}_\varphi(B, M) \iff (\varphi, d) \in \text{Hom}(B, E(A, M)).$

$\text{Der}_\varphi(B, M)$ charakterisiert somit diejenigen $\nu \in \text{Hom}(B, E(A, M))$, die folgendes Diagramm von T -Algebren kommutativ machen :

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{\varphi} & A \\
 \downarrow \nu & & \downarrow 1 \\
 E(A, M) & \longrightarrow & A
 \end{array}$$

$\varphi = 1_A$ ergibt den Spezialfall $\text{Der}(A, M)$.

Für die späteren Überlegungen grundlegend ist folgendes

Lemma 1 : Sei $\varphi \in \text{Hom}(B, A)$ ein Homomorphismus von T -Algebren, U die universelle T -Multiplikationseinhüllende von A . Dann gibt es $D_\varphi(B) \in /T\text{-Mod } A/$, so daß die Funktoren $\text{Der}_\varphi(B, -)$ und $\text{Hom}_U(D_\varphi(B), -)$ natürlich isomorph sind. Insbesondere existiert $D(A) \in /T\text{-Mod } A/$, so daß $\text{Der}(A, M) \simeq \text{Hom}_U(D(A), M)$ als k -Vektorräume funktoriell in M für alle $M \in /T\text{-Mod } A/$.

Beweis (vgl. auch B. Pareigis [21]) :

Sei Q_φ der von $\{ \overleftarrow{\varphi} b_1 \otimes b_2 + \overrightarrow{\varphi} b_2 \otimes b_1 - 1 \otimes b_1 b_2, b_1 b_2 \in B \}$ erzeugte U -Untermodul von $U \otimes B$.

$$D_\varphi(B) := U \otimes B / Q_\varphi, \quad \nu_\varphi: U \otimes B \longrightarrow D_\varphi(B) \text{ kanonisch}$$

Sei M ein T -Bimodul von A .

Für $d \in \text{Der}_\varphi(B, M)$ gilt

$$d(b_1 b_2) = \overleftarrow{\varphi} b_1 \cdot db_2 + \overrightarrow{\varphi} b_2 \cdot db_1$$

$e \in \text{Hom}_U(U \otimes B, M)$ werde durch

$$e(u \otimes b) := u \cdot db \text{ definiert.}$$

Dann gilt $e(Q_\varphi) = 0$, und e induziert

$$f \in \text{Hom}_U(D_\varphi(B), M) \text{ mit } e = f \nu_\varphi.$$

Werde umgekehrt $f \in \text{Hom}_U(D_\varphi(B), M)$ zu $e = f \nu_\varphi$ fortgesetzt und d durch $db := e(1 \otimes b)$ definiert, dann gilt natürlich $d \in \text{Der}_\varphi(B, M)$.

Dadurch sind zueinander inverse k -lineare Abbildungen $\phi(M) : \text{Der}_\varphi(B, M) \longrightarrow \text{Hom}_U(D_\varphi(B), M)$
 $\psi(M) : \text{Hom}_U(D_\varphi(B), M) \longrightarrow \text{Der}_\varphi(B, M)$

definiert, und man verifiziert leicht, daß für jeden U -Homomorphismus $g \in \text{Hom}_U(M, N)$ folgendes Diagramm kommutativ ist :

$$\begin{array}{ccc} \text{Der}_\varphi(B, M) & \xrightarrow{\phi(M)} & \text{Hom}_U(D_\varphi(B), M) \\ \downarrow \text{Der}_\varphi(B, g) & & \downarrow \text{Hom}_U(D_\varphi(B), g) \\ \text{Der}_\varphi(B, N) & \xrightarrow{\phi(N)} & \text{Hom}_U(D_\varphi(B), N) \end{array}$$

Im Spezialfall ($\varphi = 1_A$) ist $D(A) = U \otimes A / Q$, wobei Q der von $\{a_1 \otimes a_2 + a_2 \otimes a_1 - 1 \otimes a_1 a_2, a_1, a_2 \in A\}$ erzeugte U -Untermodul von $U \otimes A$ ist.

Bemerkungen :

(1) Bezeichne $\partial_\varphi \in \text{Der}_\varphi(B, D_\varphi(B))$ die durch $\partial_\varphi(b) := \nu_\varphi(1 \otimes b)$ definierte Derivation, dann ist gemäß Lemma 1 klar, inwiefern das Paar $(D_\varphi(B), \partial_\varphi)$ als Lösung eines universellen Problems charakterisierbar ist.

(2) Sei $\{y_i, i \in I\}$ Erzeugendensystem der k -Algebra B . Dann ist $\{\partial_\varphi(y_i), i \in I\}$ Erzeugendensystem des U -Moduls $D_\varphi(B)$. Ist also B endlich erzeugt als k -Algebra, so ist $D_\varphi(B)$ endlich erzeugt als U -Modul.

(3) $D_\varphi(B) \simeq U(A) \otimes_{U(B)} D(B)$

Das folgt unmittelbar aus der in M funktoriellen Isomorphie

$$\text{Hom}_{U(A)}(U(A) \otimes_{U(B)} D(B), M) \simeq \text{Hom}_{U(B)}(D(B), M_\varphi)$$

(4) Ist B freie T -Algebra mit freiem Erzeugendensystem $\{x_i, i \in I\}$, so ist $D_\varphi(B)$ freier $U(A)$ -Modul mit $U(A)$ -Basis $\{\partial_\varphi(x_i), i \in I\}$.

Wegen (3) genügt es, sich zu überlegen, daß $D(B)$ freier $U(B)$ -Modul mit $U(B)$ -Basis $\{\partial(x_i), i \in I\}$ ist. Das sieht man aber sofort ein, wenn man die in M funktorielle Isomorphie

$$\begin{array}{ccc} \text{Der}(B, M) & \simeq & \text{Hom}_{U(B)}(D(B), M) \\ & \searrow & \swarrow \\ & M^I & \end{array}$$

beachtet.

Man nennt $D_\varphi(B)$ den abgeleiteten Modul von $\varphi \in \text{Hom}(B, A)$ und $D(A)$ kurz den abgeleiteten Modul von A .

Abschließend noch die notwendigen Bemerkungen zum Tripelsystemfall und den Varianten im Algebrenfall :

Sei $\varphi \in \text{Hom}(V, T)$ ein Homomorphismus von T -Tripelsystemen. Dann ist der Funktor $\text{Der}_\varphi(V, -)$ von $T\text{-Mod}$ T in $\text{Mod } k$ wie im Algebrenfall definiert und charakterisiert. Lemma 1 gilt wörtlich wie im Algebrenfall; bezeichne U die universelle T -Multiplikationseinhüllende von T , dann erhält man wiederum $D_\varphi(V)$ als $U \otimes V / Q_\varphi$, wobei hier Q_φ der U -Untermodule von $U \otimes V$ ist, der von allen Elementen der Form

$$\overleftarrow{\varphi a} \otimes \overrightarrow{\varphi b} c + \overleftarrow{\varphi a} \otimes \overrightarrow{\varphi c} b + \overrightarrow{\varphi b} \otimes \overrightarrow{\varphi c} a - 1 \otimes [a, b, c], \quad a, b, c \in V, \text{ erzeugt}$$

wird.

Insbesondere gilt $D(T) = U \otimes T / Q$, und Q wird von allen Elementen der Form

$$\overleftarrow{a} \otimes \overrightarrow{b} c + \overleftarrow{a} \otimes \overrightarrow{c} b + \overrightarrow{b} \otimes \overrightarrow{c} a - 1 \otimes [a, b, c], \quad a, b, c \in T, \text{ erzeugt.}$$

Mit den natürlichen Modifikationen im Beweisgang ist damit Lemma 1 auch im Tripelsystemfall gesichert.

Ebenso gelten die vier an Lemma 1 anschließenden Bemerkungen sinngemäß auch im Tripelsystemfall.

Zu den Varianten im Algebrenfall ist folgendes anzumerken :

Sei (A, σ) eine T -Algebra mit Involution bzw. Automorphismus der Periode 2, U_σ ihre universelle T -Multiplikationseinhüllende mit Involution bzw. Automorphismus der Periode 2, $\varphi \in \text{Hom}((B, \sigma), (A, \sigma))$ ein Homomorphismus von T -Algebren mit Involution bzw. Automorphismus der Periode 2.

Definiere $D_\varphi(B, \sigma) \in T\text{-Mod}(A, \sigma)$ durch

$D_\varphi(B, \sigma) = U_\sigma \otimes_{Q_\varphi} B / Q_\varphi$, wobei Q_φ der U_σ -Untermodul von $U_\sigma \otimes B$ ist, der durch

$$\left\{ \overrightarrow{\varphi} b_1 \otimes b_2 + \overrightarrow{\varphi} b_2 \otimes b_1 - 1 \otimes b_1 b_2, \quad s \otimes b - 1 \otimes \sigma b, \quad b_1, b_2, b \in B \right\}$$

erzeugt wird.

Dann gilt wieder

$\text{Der}_\varphi((B, \sigma), (M, \sigma)) \simeq \text{Hom}_{U_\sigma}(D_\varphi(B, \sigma), (M, \sigma))$ "kanonisch" und funktoriell in (M, σ) .

Die unitäre Variante ist klar.

3.1.2 Die abgeleitete Modulfolge einer T-Nullerweiterung.

Wieder soll hier nur der Algebrenfall ausführlicher dargestellt werden. Die notwendigen Modifikationen im Tripelsystemfall sowie bei den Varianten im Algebrenfall sind völlig natürlich und erfordern keine weitere Erläuterung.

Lemma 2 : Eine T-Nullerweiterung $0 \longrightarrow K \hookrightarrow B \xrightarrow{\varphi} A \longrightarrow 0$ einer T-Algebra A induziert eine exakte Folge von U-Linksmoduln und U-Homomorphismen.

$$K \xrightarrow{\partial j} D_\varphi(B) \xrightarrow{\partial \varphi} D(A) \longrightarrow 0,$$

die abgeleitete Modulfolge der T-Nullerweiterung.

Ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\psi} & B & \xrightarrow{\varphi} & A \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow \mu & & \downarrow 1 \\ 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{\psi'} & B' & \xrightarrow{\varphi'} & A \longrightarrow 0 \end{array}$$

von singulären T-Erweiterungen von A durch M bzw. M' liefert dann ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} M & \xrightarrow{\psi} & D_\varphi(B) & \xrightarrow{\partial \varphi} & D(A) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow \partial \mu & & \downarrow 1 \\ M' & \xrightarrow{\psi'} & D_{\varphi'}(B') & \xrightarrow{\partial \varphi'} & D(A) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

von U-Linksmoduln und U-Homomorphismen.

Beweis : Für die exakte Folge $0 \longrightarrow U \otimes K \xrightarrow{\quad} U \otimes B \xrightarrow{1 \otimes \varphi} U \otimes A \longrightarrow 0$ von U-Linksmoduln gilt $(1 \otimes \varphi) Q_\varphi = Q$, so daß kanonisch folgendes kommutatives Diagramm von U-Homomorphismen entsteht :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & U \otimes K & \xrightarrow{\quad} & U \otimes B & \xrightarrow{1 \otimes \varphi} & U \otimes A \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow \gamma_\varphi & & \downarrow \gamma \\ & & & & D_\varphi(B) & \xrightarrow{\partial \varphi} & D(A) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Wähle nun $\alpha \in \text{Hom}_K(A, B)$ mit $\varphi \alpha = 1_A$, und definiere

$\partial j : K \longrightarrow D_\varphi(B)$ durch

$$\partial j(n) := 1 \otimes n + Q_\varphi, \quad n \in K.$$

Wegen $\partial j(\tilde{a} \cdot n) = 1 \otimes \alpha(a)n + Q_\varphi = \tilde{a} \otimes n + Q_\varphi$

und $\partial j(\tilde{a}' \cdot n) = 1 \otimes n \alpha(a) + Q_\varphi = \tilde{a}' \otimes n + Q_\varphi$

gilt $\partial j \in \text{Hom}_U(K, D_\varphi(B))$,

und wegen $\text{Ker } \partial \varphi = U \otimes K + Q_\varphi$ ist dann die U-Exaktheit von $K \xrightarrow{\partial j} D_\varphi(B) \xrightarrow{\partial \varphi} D(A) \longrightarrow 0$ klar.

Zur letzten Aussage des Lemmas verifiziert man sofort, daß für $1 \otimes \mu : U \otimes B \longrightarrow U \otimes B'$ ($(1 \otimes \mu) Q_\varphi \subset Q_\varphi$), gilt, so daß damit $\partial \mu$ gesichert ist. Alles weitere ist dann klar.

Bemerkung :

Der U-Epimorphismus $D_\varphi(B) \xrightarrow{\partial \varphi} D(A) \longrightarrow 0$ existiert natürlich unabhängig davon, ob $(\text{Ker } \varphi)^2 = 0$ ist oder nicht. Diese Beobachtung erlaubt eine etwas "explizitere" Beschreibung des abgeleiteten Moduls $D(A)$.

Aus Lesbarkeitsgründen werde angenommen, daß A eine endlich präsentierte T-Algebra ist, d.h. daß eine exakte Folge von T-Algebren $0 \longrightarrow R \xrightarrow{\quad} F \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$ existiert, wobei F freie T-Algebra mit freiem Erzeugendensystem $\{x_1, \dots, x_n\}$ und $R = \text{Ker } \pi$ ebenfalls endlich erzeugt mit Erzeugendensystem $\{r_1, \dots, r_m\}$ ist. Sei nun U die universelle T-Multiplikationseinhüllende von A.

Bezeichnen $\frac{\partial}{\partial x_i} \in \text{Der}_\pi(F, U)$ die durch $\frac{\partial}{\partial x_i} x_j = \delta_{ij} 1$,

$1 \leq i, j \leq n$, eindeutig bestimmten Derivationen von F in U_π .

Setze $u_{ij} := \frac{\partial}{\partial x_i} r_j$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$.

Sei $\partial_\pi F$ freier U-Linksmodul mit U-Basis $\{z_1, \dots, z_n\}$.

Bezeichne $\partial_\pi R$ den von den Elementen

$$s_j = \sum u_{ij} z_i = \sum \left(\frac{\partial}{\partial x_i} r_j \right) z_i, \quad 1 \leq j \leq m$$

erzeugten U-Untermodul von $\partial_\pi F$.

Sei $p : \partial_\pi F \longrightarrow \partial A := \partial_\pi F / \partial_\pi R$ der

kanonische U-Epimorphismus.

Definiere $\partial_\pi \in \text{Der}_\pi(F, \partial_\pi F)$ durch

$$\partial_\pi f := \sum \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f \right) z_i$$

und $\partial \in \text{Der}(A, \partial A)$ durch

$$\partial(\pi f) := p(\partial_\pi f)$$

(∂ ist wohldefiniert, da $\partial_\pi(\text{Ker } \pi) \subset \text{Ker } p$)

Dann gibt es Isomorphismen von U-Linksmoduln, so daß das folgende Diagramm kommutativ ist :

$$\begin{array}{ccccc}
 F & \xrightarrow{\pi} & A & & \\
 \partial_\pi \downarrow & \searrow \partial_\pi & \downarrow \partial & \searrow \partial & \\
 D_\pi(F) & \xrightarrow{\partial_\pi} & D(A) & & \\
 \searrow \sim & & \searrow \sim & & \\
 & \partial_\pi F & \xrightarrow{p} & \partial A &
 \end{array}$$

(die doppelte Verwendung der Symbole ∂ und ∂_π sollte zu keinen Mißverständnissen Anlaß geben).

Der Isomorphismus $D_\pi(F) \simeq \partial_\pi F$ wird sofort mittels Bemerkung (4) zu Lemma 1 sichergestellt.

Der Isomorphismus $D(A) \simeq \partial A$ samt angegebenen Verträglichkeitsbedingungen ergibt sich, falls gezeigt wird, daß zu jedem $d \in \text{Der}(A, M)$ ein eindeutig bestimmtes $h \in \text{Hom}_U(\partial A, M)$ mit $d = h\partial$ existiert.

werde dazu zuerst $h_\pi \in \text{Hom}_U(\partial_\pi F, M)$ definiert durch $h_\pi(z_i) = d\pi(x_i)$, $1 \leq i \leq n$.

Dann gilt : $\text{Ker } p \subset \text{Ker } h_\pi$

(da $h_\pi \partial_\pi(r_j) = 0$, $1 \leq j \leq m$, vermöge der Existenz von $g_\pi \in \text{Hom}_U(\partial_\pi F, M)$ mit $g_\pi \partial_\pi = d\pi$ sichergestellt ist),

so daß h_π eindeutig zu $h \in \text{Hom}_U(\partial A, M)$ mit $d = h\partial$ faktorisierbar ist.

Folgerung : Ist A endlich präsentierte T -Algebra,
so ist $D(A)$ endlich präsentierte
 U -Linksmodul.

Man beachte, daß obige Betrachtungen natürlich auch ohne Endlichkeitsbedingungen für eine beliebige freie Präsentation $0 \longrightarrow R \xrightarrow{\quad} F \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$ der T -Algebra A gelten. Der entscheidende Punkt ist nur der : kennt man "erzeugende Relationen für A " (d.h. für $\text{Ker } \pi$), so kennt man auch "erzeugende Relationen für $D(A)$ " (d.h. für $\text{Ker } p$).

3.2 Exaktheitsfragen. Innere Derivationen.

Auch die in diesem Abschnitt folgenden Überlegungen sind wiederum nur für den Algebrenfall formuliert, da es keinerlei Schwierigkeit bedeutet zu sehen, daß und wie sie sich auf den Tripelsystemfall und die Varianten im Algebrenfall übertragen lassen.

3.2.1 Exaktheitsfragen

Die Darstellbarkeit des Derivationsfunktors in der für die jeweilige Theorie relevanten Modulkategorie ergibt sofort folgende Exaktheitsaussagen (als Konsequenzen der Exaktheitseigenschaften des Hom-Funktors) :

a) Sei $\varphi \in \text{Hom}(B, A)$ ein Homomorphismus von T -Algebren,
 U die universelle T -Multiplikationseinhüllende von A .

Dann ist der Funktor $\text{Der } \varphi(B, -)$ linksexakt, d.h.
sei $0 \longrightarrow M'' \longrightarrow M \longrightarrow M' \longrightarrow 0$ eine exakte Folge von U -Linksmoduln, dann ist die Folge

$0 \longrightarrow \text{Der}_\varphi(B, M'') \longrightarrow \text{Der}_\varphi(B, M) \longrightarrow \text{Der}_\varphi(B, M')$
von k -Vektorräumen exakt.

b) Sei $0 \longrightarrow K \hookrightarrow B \xrightarrow{\varphi} A \longrightarrow 0$ eine T-Nullerweiterung der T-Algebra A, M ein T-Bimodul von A, dann ist die Folge von k-Vektorräumen

$$0 \longrightarrow \text{Der}(A, M) \longrightarrow \text{Der}_{\varphi}(B, M) \longrightarrow \text{Hom}_U(K, M) \text{ exakt}$$

(die k-Homomorphismen sind klar).

Man hat ja nur den linksexakten, kontravarianten Funktor $\text{Hom}_U(-, M)$ auf die U-exakte Folge

$$K \xrightarrow{\partial_i} D_{\varphi}(B) \xrightarrow{\partial \varphi} D(A) \longrightarrow 0 \text{ anzuwenden.}$$

Die Exaktheit von $\text{Hom}_U(P, -)$ für U-projektiven U-Linksmodul P und von $\text{Hom}_U(-, Q)$ für U-injektiven U-Linksmodul Q geben zu folgenden Fragen Anlaß :

(i) Wann ist $D_{\varphi}(B)$ U-projektiv, d.h. wann ist der Funktor $\text{Der}_{\varphi}(B, -)$ exakt ?

(ii) Wann ist $0 \longrightarrow K \longrightarrow D_{\varphi}(B) \longrightarrow D(A) \longrightarrow 0$ eine exakte Folge von U-Linksmoduln und U-Homomorphismen, so daß für jeden U-injektiven U-Modul Q

$$0 \longrightarrow \text{Der}(A, Q) \longrightarrow \text{Der}_{\varphi}(B, Q) \longrightarrow \text{Hom}_U(K, Q) \longrightarrow 0$$

eine exakte Folge von k-Vektorräumen ist ?

Die zweite Frage liefert den Angelpunkt für die spätere kohomologische Diskussion; dem Themenkreis der ersten Frage ist der ganze Rest dieses 3. Paragraphen gewidmet.

Zuallererst ist klar, daß $\text{Der}_{\varphi}(B, -)$ immer exakt ist, falls nur B freie T-Algebra (und damit $D_{\varphi}(B)$ freier U-Linksmodul) ist.

Aufschlußreicher ist allerdings folgendes wichtiges

Lemma 3 : Sei $0 \longrightarrow N \hookrightarrow F \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$ die kanonische generische T-Erweiterung der T-Algebra A. Dann ist der Funktor $\text{Der}_{\pi}(F, -)$ exakt, d.h. $D_{\pi}(F)$ ist U-projektiv.

Beweis : (vgl. auch N. Glassman [8], Lemma 6, S.22)

Es ist zu zeigen:

Ist $f : M \longrightarrow M'$ U-Epimorphismus, dann ist $\text{Der}_{\pi}(F, f) : \text{Der}_{\pi}(F, M) \longrightarrow \text{Der}_{\pi}(F, M')$ k-Epimorphismus.

Sei also $d' \in \text{Der}_{\pi}(F, M')$; dann ist die Existenz von $d \in \text{Der}_{\pi}(F, M)$ mit $d' = fd$ nachzuweisen.

Sei dazu $(1, f) \in \text{Hom}(E(A, M), E(A, M'))$ die Surjektion, die abbildet $a \otimes m \mapsto a \otimes f m$.

Sei $(\pi, d') \in \text{Hom}(F, E(A, M'))$ der d' entsprechende Algebrenhomomorphismus (vgl. frühere Bemerkungen über die bijektive Beziehung von Derivationen und gewissen Algebrenhomomorphismen).

Sei $\gamma \in \text{Hom}(\bar{F}, F)$ kanonisch ($\bar{F}$ die freie T -Algebra über dem Vektorraum A).

Lifte (π, d') zu $(\bar{\pi}, \bar{d}') \in \text{Hom}(\bar{F}, E(A, M'))$, d.h. es gilt: $(\bar{\pi}, \bar{d}') = (\pi, d')\gamma$.

Auf Grund der Projektivität von $\bar{F}$ in $T\text{-Alg } k$ gibt es $\mu \in \text{Hom}(\bar{F}, E(A, M))$ mit $(\bar{\pi}, \bar{d}') = (1, f)\mu$ und μ ist von der Form $\mu = (\bar{\pi}, \bar{d})$ mit $\bar{d} \in \text{Der}_{\pi}(F, M)$.

Da $(\bar{\pi}, \bar{d})(\bar{N}^2) = 0$ gilt, läßt sich $(\bar{\pi}, \bar{d})$ über γ mittels $(\pi, d) \in \text{Hom}(F, E(A, M))$ faktorisieren, d.h. $(\bar{\pi}, \bar{d}) = (\pi, d)\gamma$ mit $d \in \text{Der}_{\pi}(F, M)$.

Damit erhält man

$$(\pi, d')\gamma = (1, f)(\pi, d) = (\pi, fd)\gamma$$

und daraus $d' = fd$.

Man beachte, daß die jeweilige Darstellbarkeit der Algebrenhomomorphismen in der Komponentenform aus der Kommutativität der einschlägigen Diagramme sofort ersichtlich ist.

Die durch Lemma 3 gesicherte U -Projektivität von $D_{\pi}(F)$ hat eine bedeutsame Konsequenz, in der die Möglichkeit der erweiterungstheoretischen Interpretation der später zu definierenden höheren Kohomologieräume $H^n(A, M)$ ($n \geq 2$) begründet ist, nämlich das

Lemma 4: Sei A eine T -Algebra mit universeller T -Multiplikationseinhüllenden U , und sei

$$0 \longrightarrow N \hookrightarrow F \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0 \text{ generische } T\text{-Erweiterung von } A.$$

Dann ist die durch die abgeleitete Modulfolge

$$N \xrightarrow{\partial j} D_{\pi}(F) \xrightarrow{\partial \pi} D(A) \longrightarrow 0$$

induzierte U-exakte Folge

$$0 \longrightarrow \text{Ker } \partial j \longrightarrow N \longrightarrow \text{Ker } \partial \pi \longrightarrow 0$$

auch U-zerfallend.

Beweis : Man betrachte die folgende Situation :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & U \otimes N & \hookrightarrow & U \otimes F & \xrightarrow{1 \otimes \pi} & U \otimes A \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \mu & & \downarrow \gamma_{\pi} & & \downarrow \gamma \\ N & \xrightarrow{\partial j} & D_{\pi}(F) & \xrightarrow{\partial \pi} & D(A) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

$$(\mu(u \otimes n) = un)$$

Die U-Projektivität von $D_{\pi}(F)$ in diesem kommutativen Diagramm von U-Homomorphismen liefert nun alles Gewünschte :

Die exakte Folge $0 \longrightarrow Q_{\pi} \hookrightarrow U \otimes F \xrightarrow{\gamma_{\pi}} D_{\pi}(F) \longrightarrow 0$ ist U-zerfallend, d.h. es gibt U-Monomorphismus $\alpha_{\pi}: D_{\pi}(F) \longrightarrow U \otimes F$, so daß mit $D_{\pi} = \alpha_{\pi}(D_{\pi}(F))$ gilt : $U \otimes F = Q_{\pi} \oplus D_{\pi}$.

Außerdem gilt : $\alpha_{\pi}(\text{Ker } \partial \pi) \subset U \otimes N$
denn : $\alpha_{\pi}(\text{Ker } \partial \pi) \subset \gamma_{\pi}^{-1}(\text{Ker } \partial \pi) \cap D_{\pi} = (U \otimes N + Q_{\pi}) \cap D_{\pi}$

Definiere $\psi := \mu \alpha_{\pi}^{\circ}$, $\alpha_{\pi}^{\circ} = \alpha_{\pi} / \text{Ker } \partial \pi$.

Dann gilt : $\partial j \psi = 1_{\text{Ker } \partial \pi}$.

Sei nämlich $z \in \text{Ker } \partial \pi$, und sei $\alpha_{\pi}(z) = \sum u_i \otimes n_i$,

dann gilt : $\psi(z) = \sum u_i n_i$

und $\partial j \psi(z) = \sum 1 \otimes u_i n_i \text{ mod } Q_{\pi} = \sum u_i \otimes n_i \text{ mod } Q_{\pi}$

Schließlich hat man noch

$$z = \gamma_{\pi}^{-1} \alpha_{\pi}(z) = \gamma_{\pi}^{-1} \left(\sum u_i \otimes n_i \right) = \sum u_i \otimes n_i \text{ mod } Q_{\pi}$$

und damit fertig.

Folgerung : Sei $0 \longrightarrow N \longrightarrow F \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$ eine generische T-Erweiterung der T-Algebra A, definiert durch das generische T-Faktorsystem $g : A \otimes A \longrightarrow N$. Dann gibt es eine U-direkte Zerlegung $N = N_0 \oplus N_1$ und T-Faktorsysteme $g_0 : A \otimes A \longrightarrow N_0, g_1 : A \otimes A \longrightarrow N_1$ mit $g = g_0 \oplus g_1$, so daß g_1 generisch für alle T-Faktorsysteme $h : A \otimes A \longrightarrow M$ ist, deren abgeleitete Modulfolge (d.h. die abgeleitete Modulfolge von $E_h(A, M)$) exakt ist.

3.2.2 Innere Derivationen

Sei A eine T-Algebra mit universeller T-Multiplikationseinhüllenden U, und sei M ein T-Bimodul von A, d.h. ein unitärer U-Linksmodul.

Dann ist M kanonisch isomorph zu $\text{Hom}_U(U, M)$ (U-Linksmodulstruktur durch Rechtsmultiplikation im Argumentbereich) vermöge der Zuordnung $m \longmapsto t_m$ mit $t_m(u) := um$ für alle $u \in U$.

Der k-Unterraum $\partial\text{-Inder}(A, M)$ der inneren Derivationen in $\text{Der}(A, M)$ werde nun wie folgt definiert :

Für $d \in \text{Der}(A, M)$ gelte definitionsgemäß

$d \in \partial\text{-Inder}(A, M) : \Longleftrightarrow$ Es gibt lokalendliche Familie $(\partial_i)_{i \in I} \in \text{Der}(A, U)^I$ (d.h. für jedes $a \in A$ ist $\partial_i(a) \neq 0$ nur für endlich viele $i \in I$) und $(m_i)_{i \in I} \in M^I$, so daß $d = \sum t_{m_i} \partial_i$; explizit : $da = \sum \partial_i(a) m_i$.

Man beachte, daß per definitionem gilt :

$$\partial\text{-Inder}(A, U) = \text{Der}(A, U) .$$

$\partial\text{-Inder}(A, -)$ kann als additiver kovarianter Subfunktor von $\text{Der}(A, -)$ aufgefaßt werden (vgl. auch N. Glassman [8]).

Satz 1 : Für eine T-Algebra A gilt :

$$\text{Der}(A, -) \text{ exakt} \Longleftrightarrow \text{Der}(A, -) = \partial\text{-Inder}(A, -)$$

Beweis : Sei U die universelle T-Multiplikationseinhüllende von A, und sei D(A) der abgeleitete Modul von A.

Zu zeigen :

$D(A)$ U-projektiv $\iff$ Für jeden U-Linksmodul M
sind alle Derivationen von
 A in M innere.

Diese Äquivalenz ist aber modulo Dual-Basis-Lemma (vgl. Cartan-Eilenberg [4], S.132) verhältnismäßig trivial :

$D(A)$ U-projektiv $\iff$ zu jedem U-Erzeugendensystem $(c_i)_{i \in I}$ von $D(A)$ gibt es $(f_i)_{i \in I} \in \text{Hom}_U(D(A), U)^I$ so daß gilt : Für jedes $c \in D(A)$ ist $f_i(c) \neq 0$ nur für endlich viele $i \in I$, und $c = \sum f_i(c) c_i$.

Sei nun $M \in \mathcal{T}\text{-Mod } A/$, dann werde identifiziert $\text{Hom}_U(D(A), M) = \text{Der}(A, M)$ vermöge der Entsprechung $f(1a + Q) = d(a)$, $a \in A$ (vgl. Lemma 1).

Sei $\{e_i, i \in I\}$ ein Erzeugendensystem der k -Algebra A , dann ist $\{c_i = 1e_i + Q, i \in I\}$ U-Erzeugendensystem von $D(A)$.

$D(A)$ U-projektiv $\implies$ es gibt $(\partial_i)_{i \in I} \in \text{Der}(A, U)^I$, so daß für jedes $a \in A$ $\partial_i(a) \neq 0$ nur für endlich viele $i \in I$ gilt und $1a + Q = \sum \partial_i(a) c_i$.

Sei nun $d \in \text{Der}(A, M)$ beliebig, so erhält man daraus sofort $d(a) = \sum \partial_i(a) d(e_i)$ für alle $a \in A$, d.h. die gewünschte Darstellung $d = \sum_{i \in I} t_{m_i} \partial_i$

ist (mit $m_i = d(e_i)$, $i \in I$) sichergestellt.

Umgekehrt muß ja insbesondere die Derivation $\partial \in \text{Der}(A, D(A))$ (mit $\partial(a) = 1a + Q$) innere Derivation sein. Dadurch wird aber gerade die Situation des Dual-Basis-Lemmas geschaffen, d.h. $D(A)$ ist U-projektiv.

Korollar : Ist $\text{Der}(A, -)$ exakt, dann existiert eine feste lokalendliche Familie $(\partial_i)_{i \in I} \in \text{Der}(A, U)^I$, die universell ist in folgendem Sinne :

Für jeden $\mathcal{T}$ -Bimodul M von A und jede Derivation $d \in \text{Der}(A, M)$ gibt es $(m_i)_{i \in I} \in M^I$ mit

$$d = \sum_{i \in I} t_{m_i} \partial_i$$

Bemerkung : Sei A eine endlichdimensionale T -Algebra (allgemeiner : endlich erzeugt als k -Algebra), dann gilt somit :

$\text{Der}(A, -)$ exakt $\iff$ es gibt $\partial_1, \dots, \partial_n \in \text{Der}(A, U)$
so daß für alle $M \in /T\text{-Mod } A/$ und alle $d \in \text{Der}(A, M)$
 $m_1, \dots, m_n \in M$ existieren mit $d = \sum t_{m_i} \partial_i$.

Diskussion von Beispielen :

(1) Sei A eine endlichdimensionale unitäre assoziative Algebra, $U_1 = A \otimes A^0$ ihre unitäre universelle assoziative (Standard-) Multiplikationseinhüllende.

Bezeichne I das Linksideal von $A \otimes A^0$, das von $\{a \otimes 1 - 1 \otimes a^0, a \in A\}$ erzeugt wird.

Dann gilt $D(A) \cong I$ als U_1 -Linksmoduln (vgl. Cartan-Eilenberg [4], S.168).

Sei M ein unitärer assoziativer Bimodul von A ; eine Derivation $d \in \text{Der}(A, M)$ heißt klassisch innere Derivation, falls $m \in M$ existiert mit $d(a) = am - ma$ für alle $a \in A$.

$\text{Inder}(A, M)$ bezeichne den k -Unterraum der klassisch inneren Derivationen von $\text{Der}(A, M)$.

Dann gilt : $\partial\text{-Inder}(A, M) = \text{Inder}(A, M)$

denn sei $d \in \text{Der}(A, M)$ von der Form $d = \sum t_{m_i} \partial_i$
mit $\partial_1, \dots, \partial_n \in \text{Der}(A, A \otimes A^0)$ und bezeichnen

$f_1, \dots, f_n \in \text{Hom}_{U_1}(I, A \otimes A^0)$ die den ∂_i entsprechenden U_1 -Homomorphismen, so gilt :

$$\begin{aligned} d(a) &= \sum \partial_i(a) m_i = \sum f_i(a \otimes 1 - 1 \otimes a^0) m_i = \\ &= \sum (a(f_i(1 \otimes 1) m_i) - (f_i(1 \otimes 1) m_i) a) = \\ &= a \left(\sum f_i(1 \otimes 1) m_i \right) - \left(\sum f_i(1 \otimes 1) m_i \right) a \end{aligned}$$

d.h. d ist klassisch innere Derivation;

umgekehrt ist alles klar :

$$da = am - ma = (a \otimes 1 - 1 \otimes a^0) \cdot m = \partial_0(a) m$$

und $\partial_0 : a \mapsto a \otimes 1 - 1 \otimes a^0$ ist Derivation von A in $U_1 = A \otimes A^0$.

Damit gilt für jede endlichdimensionale unitäre assoziative Algebra A :

$\text{Der}(A, -)$ exakt $\iff$ alle Derivationen von A in unitäre assoziative Bimoduln M von A sind klassisch innere.

(2) Sei A eine endlichdimensionale Lie-Algebra, U ihre universelle Lie-Multiplikationseinhüllende und I das von A in U erzeugte (zweiseitige) Ideal.

Dann gilt : $D(A) \cong I$ als U-Linksmoduln (vgl. dazu Hilton-Stammbach [10], S. 234).

Sei nun M ein beliebiger U-Linksmodul.

Eine Derivation $d \in \text{Der}(A, M)$ heißt klassisch innere Derivation, falls $m \in M$ existiert, so daß $d(a) = am$ für alle $a \in A$ gilt.

$\text{Inder}(A, M)$ bezeichne den k -Unterraum der klassisch inneren Derivationen von $\text{Der}(A, M)$.

Dann gilt : $\text{Inder}(A, M) \subset \partial\text{-Inder}(A, M)$

denn : die kanonische Einbettung $A \hookrightarrow U$ ist eine Derivation $\partial_0 \in \text{Der}(A, U)$, und jede klassisch innere Derivation ist ja per definitionem von der Form $d = t_m \partial_0$.

Im allgemeinen gilt jedoch $\text{Inder}(A, M) \neq \partial\text{-Inder}(A, M)$.

Dazu beachte man, daß bei der Identifikation

$\text{Der}(A, M) = \text{Hom}_U(I, M)$ $\text{Inder}(A, M)$ nichts anderes ist als das Bild von M bei der Injektion

$\text{Hom}_U(U, M) \longrightarrow \text{Hom}_U(I, M)$.

Sei nun $A = kx$ eine eindimensionale Lie-Algebra, dann ist der Polynomring $U = k[x]$ eine universelle Lie-Multiplikationseinhüllende von A mit $I = (x)$.

Definiere $f \in \text{Hom}_U(I, U)$ durch $f(p(x)x) = p(x)$.

f ist sicher nicht zu $f \in \text{Hom}_U(U, U)$ fortsetzbar,

d.h. es gilt : $\text{Inder}(A, U) \subsetneq \text{Der}(A, U) = \partial\text{-Inder}(A, U)$.

Man beachte, daß im angegebenen Beispiel $\text{Der}(A, -)$ exakt ist; es gilt nämlich allgemeiner :

Sei A eine endlichdimensionale Lie-Algebra, so daß

$\text{Der}(A, -)$ exakt ist; dann ist äquivalent :

(a) $\text{Inder}(A, M) = \partial\text{-Inder}(A, M)$

für alle Lie-Bimoduln M von A

(b) $\text{Inder}(A, M) = \text{Der}(A, M)$
für alle Lie-Bimoduln M von A

(c) $'A = 0$.

Die Äquivalenz von (a) und (b) ist klar; (b) impliziert aber (c), da $\dim_{U_1} k = 0$ $A = 0$ zur Folge hat (vgl. Cartan-Eilenberg [4], S. 283).

(3) Sei A eine endlichdimensionale unitäre Jordan-Algebra, U_1 ihre unitäre universelle Jordan-Multiplikationseinhüllende, und sei M ein unitärer Jordan-Bimodul von A . Eine Derivation $d \in \text{Der}(A, M)$ heißt klassisch innere Derivation, falls $b_1, \dots, b_n \in A$, $m_1, \dots, m_n \in M$ existieren, so daß gilt : $da = \sum b_i(am_i) - (ab_i)m_i$ für alle $a \in A$.

Bezeichne auch hier $\text{Inder}(A, M)$ den k -Unterraum der klassisch inneren Derivationen von $\text{Der}(A, M)$, so gilt ebenfalls $\text{Inder}(A, M) \subset \partial\text{-Inder}(A, M)$.

Dazu muß man sich nur überlegen, daß die für festes $b \in A$ durch $\partial_b(a) := ba - b.a$ (unpunktierte Multiplikation in U_1 , punktierte Multiplikation in $A \subset U_1$) definierte Abbildung eine Derivation von A in U_1 ist; das gilt aber wegen

$abc + cba + (a.c).b = a(b.c) + b(c.a) + c(a.b)$
in U_1 (vgl. N. Jacobson [12], S. 96)

Sei nun A separable Jordan-Algebra, dann ist auch U_1 separabel (N. Jacobson [12], S. 286) und damit $\text{Der}(A, -)$ exakt, so daß $\text{Der}(A, M) = \partial\text{-Inder}(A, M)$ für alle unitären Jordan-Bimoduln M von A gilt.

Es gibt aber separable Jordan-Algebren A und endlichdimensionale unitäre Jordan-Bimoduln M von A , so daß $\text{Inder}(A, M) \subsetneq \text{Der}(A, M)$ gilt (vgl. N. Jacobson [12], S. 299).

Somit ist auch hier - wie im Lie-Fall - der Begriff der klassisch inneren Derivation enger als der oben diskutierte.

4. Eine Kohomologietheorie von nichtassoziativen Algebren und Tripelsystemen : Die Theorie der exakt verbundenen Folge der rechtsabgeleiteten Funktoren des Derivationsfunktors.

Der nun folgende Abschnitt behandelt die allgemeineren Merkmale einer verhältnismäßig "handlichen" Kohomologietheorie für nichtassoziative Algebren und Tripelsysteme, deren Ansatz auf Arbeiten von Barr-Rinehart [1] und B. Pareigis [21] zurückgeht.

Dazu werde zunächst der Algebrenfall betrachtet :
Sei $\varphi \in \text{Hom}(B, A)$ ein Homomorphismus von $\mathbf{T}$ -Algebren, U die universelle $\mathbf{T}$ -Multiplikationseinhüllende von A .

Nach Lemma 1 ist die Identifikation $\text{Der}_{\varphi}(B, -) = \text{Hom}_U(D_{\varphi}(B), -)$ erlaubt, so daß $(H^n_{\varphi}(B, -))_{n \geq 0}$, die exakt verbundene Folge der rechtsabgeleiteten Funktoren von $\text{Der}_{\varphi}(B, -)$, mit der Folge $(\text{Ext}_U^n(D_{\varphi}(B), -))_{n \geq 0}$ identifizierbar ist. Im Spezialfall $\varphi = 1_A$ gilt somit $(H^n(A, -)) = (\text{Ext}_U^n(D(A), -))_{n \geq 0}$. Die so definierte Kohomologietheorie ist damit zuallererst Kohomologietheorie der abgeleiteten Moduln; das Ziel dieses Abschnitts ist, sie durch erweiterungstheoretische Interpretation der Kohomologieräume in der Sprache der Algebren als Kohomologietheorie von Algebren zu legitimieren.

Im Tripelsystemfall ist natürlich Ansatz wie Problematik völlig analog; sei dazu $\varphi \in \text{Hom}(V, T)$ ein Homomorphismus von $\mathbf{T}$ -Tripelsystemen, U die universelle $\mathbf{T}$ -Multiplikationseinhüllende von T , so wird durch $(H^n_{\varphi}(V, -)) = (\text{Ext}_U^n(D_{\varphi}(V), -))_{n \geq 0}$ und speziell $(H^n(T, -)) = (\text{Ext}_U^n(D(T), -))_{n \geq 0}$ die exakt verbundene Folge der n -ten Kohomologiefunktoren definiert.

Die Situation bei den Varianten im Algebrenfall ist klar (nur begriffliche Modifikationen).

Auf Grund der Linksexaktheit des Derivationsfunktors ist natürlich identifizierbar $H^0_{\varphi}(B, -) = \text{Der}_{\varphi}(B, -)$,
 $H^0(A, -) = \text{Der}(A, -)$ usw.

4.1 Charakterisierung von $H^1(A, M)$ bzw. $H^1(T, M)$.

4.1.1 Zulässige T-Nullerweiterungen.

Beschränken wir uns zuerst auf den Algebrenfall.

Die T-Algebra A und ihre universelle T-Multiplikations-einhüllende U seien fest gegeben.

Eine T-Nullerweiterung $0 \longrightarrow K \longrightarrow B \xrightarrow{\varphi} A \longrightarrow 0$ von A heiÙe zulässig, falls die abgeleitete Modulfolge $0 \longrightarrow K \xrightarrow{\partial_j} D_{\varphi}(B) \xrightarrow{\partial_{\varphi}} D(A) \longrightarrow 0$ exakt, d.h. falls ∂_j injektiv ist.

Sei nun M ein T-Bimodul von A, h ein T-Faktorsystem von A in M.

h heiÙe zulässig, falls $\theta \in \text{Hom}_K(U \otimes A, M)$ existiert, so daÙ gilt :

$$(ZF) \quad u h(a_1 \otimes a_2) = \theta(u(\overleftarrow{a_1} \otimes a_2 + \overrightarrow{a_2} \otimes a_1 - 1 \otimes a_1 a_2))$$

für alle $a_1, a_2 \in A, \quad u \in U$.

Lemma 5 : Die T-Nullerweiterung $E_h(A, M)$ von A ist zulässig $\iff$ h ist zulässiges T-Faktorsystem von A in M.

Beweis : Die T-Nullerweiterung $E_h(A, M)$ werde zur Notations-erleichterung als $0 \longrightarrow M \longrightarrow B \xrightarrow{\varphi} A \longrightarrow 0$ geschrieben.

Betrachte die Situation

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & U \otimes B = (U \otimes M) \oplus (U \otimes A) \\ & \searrow \partial_j & \downarrow \gamma_{\varphi} \\ & & D_{\varphi}(B) \end{array}$$

Dann gilt : $0 \longrightarrow M \longrightarrow D_{\varphi}(B)$ ist exakt

(d.h. ∂_j ist injektiv) $\iff$

Es gibt $\bar{\theta} \in \text{Hom}_K(U \otimes B, M)$, so daÙ

(i) $\bar{\theta}(1 \otimes m) = m$ für alle $m \in M$

(ii) $\bar{\theta}(Q_{\varphi}) = 0$

Mit der Bedingung

$$(i^*) \quad \theta(u \otimes m) = um \quad \text{für alle } u \in U, m \in M$$

gilt dann : (i) und $(ii) \iff (i^*)$ und (ii)

denn (ii) impliziert insbesondere

$$(ii\alpha) \quad \bar{\theta}(u(\vec{a} \otimes m + \vec{q} \vec{m} \otimes a - 1 \otimes am)) = 0$$

$$\text{d.h.} \quad \bar{\theta}(u(\vec{a} \otimes m)) = \bar{\theta}(u \otimes am)$$

$$(ii\beta) \quad \bar{\theta}(u(\vec{q} \vec{m} \otimes a + \vec{a} \otimes m - 1 \otimes ma)) = 0$$

$$\text{d.h.} \quad \bar{\theta}(u(\vec{a} \otimes m)) = \bar{\theta}(u \otimes ma)$$

für alle $a \in A, u \in U, m \in M$, so daß (i) und

$(ii\alpha) + (ii\beta)$ gerade (i^*) liefern.

Umgekehrt impliziert (i^*) natürlich $(ii\alpha)$ und

$(ii\beta)$.

Es ist klar, daß (ii) äquivalent ist zu

$(ii\alpha)$, $(ii\beta)$ und (i^*) , wobei

$$(i^*) \quad \bar{\theta}(u(\vec{a}_1 \otimes a_2 + \vec{a}_2 \otimes a_1 - 1 \otimes a_1 a_2)) = \bar{\theta}(u(h(a_1 \otimes a_2)))$$

für alle $a_1, a_2 \in A, u \in U$,

so daß schließlich gilt : (i) und $(ii) \iff (i^*)$ und (ii^*)

Damit erhält man :

$$\hat{\theta}_j \text{ ist injektiv} \iff \text{es gibt } \theta \in \text{Hom}_K(U \otimes A, M)$$

so daß (zF) erfüllt ist

denn gibt es $\bar{\theta} \in \text{Hom}_K(U \otimes B, M)$, so daß

(i^*) und (ii^*) gelten, dann erfüllt

$\theta = \bar{\theta}/U \otimes A$ die Bedingung (zF)

umgekehrt setze man θ im Sinne von (i^*) auf

$U \otimes B$ fort.

Korollar : Bezeichne wieder $0 \longrightarrow M \xleftarrow{\quad} B \xrightarrow{\varphi} A \longrightarrow 0$

die T -Nullerweiterung $E_h(A, M)$ von A .

Dann gilt :

h ist trivial (d.h. $E_h(A, M)$ zerfällt)

$$\longleftrightarrow$$

Die abgeleitete Modulfolge

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow D_\varphi(B) \longrightarrow D(A) \longrightarrow 0$$

ist U -zerfallende singuläre Erweiterung von $D(A)$ durch M .

Beweis : 1) h trivial $\iff h$ zulässig, und (zF) kann mit $\Theta \in \text{Hom}_U(U \otimes A, M)$ erfüllt werden (man beachte, daß bei Identifikation $\text{Hom}_K(A, M) = \text{Hom}_U(U \otimes A, M)$ Θ nichts anderes ist als die h trivialisierende k -lineare Abbildung γ).

2) Mit den Bezeichnungen von Lemma 5 gilt : $0 \longrightarrow M \longrightarrow D_\varphi(B) \longrightarrow D(A) \longrightarrow 0$ ist U -zerfallende singuläre Erweiterung von $D(A)$ durch $M \iff \bar{\Theta}$ kann aus $\text{Hom}_U(U \otimes B, M)$ gewählt werden $\iff \Theta$ kann aus $\text{Hom}_U(U \otimes A, M)$ gewählt werden.

Bemerkung : Für T -Faktorsysteme von A in M ist die Zulässigkeit also ein Äquivalenzstabiler Begriff, und die Äquivalenzklassen zulässiger T -Faktorsysteme von A in M bilden einen k -Unterraum von $\text{Opext}(A, M)$. Somit ist dann auch in $1\text{-Ext}(A, M)$ der k -Unterraum der Äquivalenzklassen zulässiger einfacher singulärer T -Erweiterungen von A durch M wohlbestimmt.

Abschließend wieder die notwendigen Bemerkungen zum Tripelsystemfall und den Varianten im Algebrenfall :

Sei T ein T -Tripelsystem mit universeller T -Multiplikationseinhüllender U .

Die Zulässigkeit einer T -Nullerweiterung von T definiert sich wie im Algebrenfall durch die Exaktheit der abgeleiteten Modulfolge.

Die Zulässigkeitsbedingung für T -Faktorsysteme h von T in U -Linksmoduln M lautet dann :

Es gibt $\Theta \in \text{Hom}_K(U \otimes T, M)$, so daß

$$(zF) \quad \begin{aligned} uh(a \otimes b \otimes c) = & \Theta(u(\overleftarrow{a \otimes b \otimes c} + \overrightarrow{a \otimes c \otimes b} \\ & + \overrightarrow{b \otimes c \otimes a} - 1 \otimes [a, b, c])) \end{aligned}$$

für alle $a, b, c \in T, u \in U$.

Damit gilt Lemma 5 und Korollar zu Lemma 5 wörtlich wie im Algebrenfall; und die Beweise dazu übertragen sich sinngemäß.

Man kann also auch hier vom k -Unterraum der Äquivalenzklassen zulässiger einfacher singulärer T -Erweiterungen in $1\text{-Ext}(T, A)$ sprechen.

Zu den Varianten im Algebrenfall sei noch folgendes angemerkt :

Sei $(A, \sigma) \in /(\mathbf{T}\text{-Alg } k)_\sigma/$ eine T -Algebra mit Involution bzw. Automorphismus der Periode 2, und sei U "die" universelle T -Multiplikationseinhüllende von A , U_σ die daraus gebildete universelle T -Multiplikationseinhüllende von (A, σ) .

Eine T -Nullerweiterung $0 \longrightarrow (K, \sigma) \hookrightarrow (B, \sigma) \xrightarrow{\varphi} (A, \sigma) \longrightarrow 0$ von (A, σ) heiÙe zulässig genau dann, wenn die abgeleitete Folge von U_σ -Linksmoduln

$$0 \longrightarrow (K, \sigma) \longrightarrow D_\varphi(B, \sigma) \longrightarrow D(A, \sigma) \longrightarrow 0 \text{ exakt ist.}$$

Sei nun $(M, \sigma) \in /T\text{-Mod}(A, \sigma)/$, und sei h ein T -Faktorsystem von (A, σ) in (M, σ) (man beachte die Verträglichkeitsbedingungen mit den σ -Operationen !).

h heiÙe dann zulässig, falls $\theta \in \text{Hom}_k(U_\sigma \otimes A, M)$ existiert, so daÙ gilt :

$$\begin{aligned} u h(a_1 \otimes a_2) &= \theta(u(\bar{a}_1 \otimes a_2 + \bar{a}_2 \otimes a_1 - 1 \otimes a_1 a_2)) \\ (ZF)_\sigma \quad \theta(us \otimes a) &= \theta(u \otimes \sigma a) \end{aligned}$$

$$\text{für alle } a_1, a_2, a \in A, \quad u \in U (!) .$$

Man beachte dazu : Das T -Faktorsystem h von (A, σ) in (M, σ) ist zulässig genau dann, wenn h bereits als T -Faktorsystem von A in M zulässig ist (die zweite Zulässigkeitsbedingung in $(ZF)_\sigma$ definiert ja gerade die Fortsetzung von

$$\theta \in \text{Hom}_k(U \otimes A, M) \text{ zu } \theta \in \text{Hom}_k(U_\sigma \otimes A, M)).$$

Damit ergibt sich völlig analog zu Obigem Lemma 5 mit Korollar und anschließender Bemerkung sinngemäß auch für diesen Fall.

4.1.2 Erweiterungstheoretische Charakterisierung des ersten Kohomologieraumes.

Vorbemerkung :

Im folgenden kommutativen Diagramm von Algebrenhomomorphismen

$$\begin{array}{ccccccc}
 O & \longrightarrow & K & \hookrightarrow & B & \xrightarrow{\varphi} & A \longrightarrow O \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \iota \\
 O & \longrightarrow & L & \hookrightarrow & C & \xrightarrow{\psi} & A \longrightarrow O
 \end{array}$$

seien die Zeilen T-Nullerweiterungen der T-Algebra A, alle unbenannten Pfeile Einbettungen von Unterobjekten und die untere Zeile sei zerfallend (d.h. ψ erlaubt einen Schnitt, der Algebrenhomomorphismus ist).

Man sagt dann, die T-Nullerweiterung

$O \longrightarrow K \hookrightarrow B \xrightarrow{\varphi} A \longrightarrow O$ von A ist in eine Split-Erweiterung eingebettet.

Eine T-Nullerweiterung der T-Algebra A ist also definitionsgemäß in eine Split-Erweiterung einbettbar, falls sie als obere Zeile in einem kommutativen Diagramm des eben beschriebenen Typs auftreten kann.

Es ist klar, was es heißen soll, daß eine einfache singuläre T-Erweiterung der T-Algebra A durch einen T-Bimodul M von A in eine Split-Erweiterung einbettbar ist : man führe alles auf die zugehörige T-Nullerweiterung zurück.

Die Einbettbarkeit in eine Split-Erweiterung ist offenbar eine äquivalenzstabile Eigenschaft einfacher singulärer Erweiterungen.

Die gleichen Überlegungen gelten natürlich auch für den Tripelsystemfall und entsprechend für die Varianten im Algebrenfall.

Für den nun folgenden wichtigen Satz sei A eine feste T-Algebra, U ihre universelle T-Multiplikationseinhüllende und M ein T-Bimodul von A.

Dann gilt der

Satz 2 : Es gibt einen natürlichen, d.h. in M funktoriellen k -Monomorphismus

$$\bigwedge : H^1(A, M) \longrightarrow 1\text{-Ext}(A, M)$$

so daß $\text{Im } \bigwedge$ auf folgende Weise charakterisierbar ist :

(i) $\text{Im } \bigwedge = k$ -Unterraum der Äquivalenzklassen
zulässiger einfacher singularer
 T -Erweiterungen von A durch M

(ii) $\text{Im } \bigwedge = k$ -Unterraum der Äquivalenzklassen derjenigen einfachen singulären T -Erweiterungen von A durch M , die in Split-Erweiterungen einbettbar sind.

Beweis : $H^1(A, M) = \text{Ext}_U^1(D(A), M)$ werde mit dem ersten Kohomologieraum des über die Bar-Auflösung von $D(A)$ definierten einschlägigen Kokettenkomplexes identifiziert, d.h. es gilt für $g, f \in \text{Hom}_k(U \otimes D(A), M)$:

$$g \in Z^1(D(A), M) \iff ug(v \otimes d) - g(uv \otimes d) + g(u \otimes vd) = 0$$

für alle $u, v \in U, d \in D(A)$.

$$f \in B^1(D(A), M) \iff \text{es gibt } f' \in \text{Hom}_k(D(A), M)$$

$$f(u \otimes d) = uf'(d) - f'(ua)$$

für alle $u \in U, d \in D(A)$.

Unter Benützung des kanonischen U -Epimorphismus $1\otimes : U \otimes U \otimes A \longrightarrow U \otimes D(A)$ können unter 1 -Kozykeln g bzw. 1 -Korändern f o.B.d.A. Elemente von $\text{Hom}_k(U \otimes U \otimes A, M)$ mit $g(U \otimes Q) = f(U \otimes Q) = 0$ angenommen werden; die Kozykel- und Korandbedingungen werden dann zu

$$ug(v \otimes w \otimes a) - g(uv \otimes w \otimes a) + g(u \otimes vw \otimes a) = 0$$

$$\text{bzw. es gibt } f' \in \text{Hom}_k(U \otimes A, M) \text{ mit } f'(Q) = 0$$

$$\text{und } f(u \otimes v \otimes a) = uf'(v \otimes a) - f'(uv \otimes a)$$

$$\text{für alle } u, v, w \in U, a \in A.$$

Das soll im folgenden stets geschehen.

(α) Die k -monomorphe Einbettung (vgl. B. Pareigis [21]):

Sei nun g ein 1-kozykel, und werde definiert

$$h_g(a_1 \otimes a_2) := g(\bar{a}_1 \otimes 1 \otimes a_2) + g(\bar{a}_2 \otimes 1 \otimes a_1)$$

Dann gilt :

(a) h_g ist T -Faktorsystem von A in M

(b) ist f ein 1-Korand, dann ist h_f trivial

(c) $h_g = 0 \implies g$ ist 1-Korand

Damit ist die k -monomorphe Einbettung

$$\Lambda: H^1(A, M) \longrightarrow \text{Opet}(A, M) \cong 1\text{-Ext}(A, M),$$

induziert durch die Zuordnung $g \mapsto h_g$, klar.

Zum Beweis von (a), (b) und (c) sei auf die Arbeit von B. Pareigis [21] verwiesen; hier soll nur kurz der Nachweis von (a) skizziert werden ((b) und (c) sind unproblematisch) :

Sei $h = h_g$, F die syntaktische k -Algebra, $\eta \in \text{Hom}(F, A)$; dann muß $h_{(\eta)}(T) = 0$ gelten.

Das ist aber sicher der Fall, wenn $h_{(\eta)}$ gemäß

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{h_{(\eta)}} & M \\ & \searrow \sigma & \nearrow \bar{g} \\ & U \otimes A & \end{array}$$

mit $\bar{g}(T) = 0$ faktorisiert werden kann.

Sei dazu $\bar{g} \in \text{Hom}_k(U \otimes A, M)$ durch

$\bar{g}(u \otimes a) := g(u \otimes 1 \otimes a)$ definiert, und werde

$\sigma \in \text{Hom}_k(F, U \otimes A)$ rekursiv (natürliche Filtrierung von F !) durch

$$\sigma x_1 := 1 \otimes x_1, \quad \sigma r := \eta(r_1) \sigma(r_2) + \sigma(r_1) \eta(r_2),$$

$r = r_1 r_2$ ein Monom vom Grad ≥ 2 , definiert.

Dann gilt $\bar{g}(T) = 0$, da (η, σ)

(mit $(\eta, \sigma)(r) := \eta r \otimes \sigma r$) k -Algebrenhomomorphismus von F in die T -Algebra $E(A, U \otimes A)$ ist.

Die Gleichheit $h_{(\eta)} = \bar{g}\sigma$ wird wiederum rekursiv (gemäß der Definition von σ) eingesehen.

(B) Die Charakterisierung (i) von $\text{Im } \Lambda$.

$\text{Im } \Lambda$ ergibt sich als der k -Unterraum der Äquivalenzklassen zulässiger einfacher singulärer T -Erweiterungen von A durch M auf Grund der beiden folgenden Tatsachen :

(a) Sei h ein T -Faktorsystem von A in M , und existiere ein 1-Kozykel g , so daß

$$h(a_1 \otimes a_2) = g(\overrightarrow{a_1} \otimes 1 \otimes a_2) + g(\overrightarrow{a_2} \otimes 1 \otimes a_1) .$$

 Definiere $\theta \in \text{Hom}_k(U \otimes A, M)$ durch

$$\theta(u \otimes a) := g(u \otimes 1 \otimes a) .$$

 Dann gilt $uh(a_1 \otimes a_2) = \theta(u(\overrightarrow{a_1} \otimes a_2 + \overrightarrow{a_2} \otimes a_1 - 1 \otimes a_1 a_2))$
 d.h. h ist zulässiges T -Faktorsystem von A in M .

(b) Sei umgekehrt h zulässiges T -Faktorsystem von A in M , d.h. gebe $\theta \in \text{Hom}_k(U \otimes A, M)$, so daß (zF) gilt, und werde $g \in \text{Hom}_k(U \otimes U \otimes A, M)$ definiert durch $g(u \otimes v \otimes a) = \theta(uv \otimes a) - u \otimes (v \otimes a)$, so ist g 1-Kozykel, und h und h_g sind äquivalent (d.h. $h - h_g$ ist trivial).

Beweis von (a) :

Nach Definition gilt bereits :

$$h(a_1 \otimes a_2) = \theta(\overrightarrow{a_1} \otimes a_2 + \overrightarrow{a_2} \otimes a_1 - 1 \otimes a_1 a_2)$$

$$\begin{aligned} (\text{da } g \text{ 1-Kozykel ist, hat man ja } \theta(1 \otimes a_1 a_2) = \\ g(1 \otimes 1 \otimes a_1 a_2) = 0) . \end{aligned}$$

Überdies erhält man

$$\begin{aligned} \theta(u(\overrightarrow{a_1} \otimes a_2 + \overrightarrow{a_2} \otimes a_1 - 1 \otimes a_1 a_2)) = \\ u \otimes (\overrightarrow{a_1} \otimes a_2 + \overrightarrow{a_2} \otimes a_1 - 1 \otimes a_1 a_2) \end{aligned}$$

wegen

$$\theta(u(\overrightarrow{a_1} \otimes a_2)) = u \otimes (\overrightarrow{a_1} \otimes a_2) + g(u \otimes \overrightarrow{a_1} \otimes a_2)$$

$$\theta(u(\overrightarrow{a_2} \otimes a_1)) = u \otimes (\overrightarrow{a_2} \otimes a_1) + g(u \otimes \overrightarrow{a_2} \otimes a_1)$$

$$\theta(u \otimes 1 \otimes a_1 a_2) = g(u \otimes 1 \otimes a_1 a_2)$$

$$\text{und } g(U \otimes Q) = 0 .$$

Beweis von (b) :

Zuallererst prüft man $g(U \otimes Q) = 0$ nach.

$$\begin{aligned} g(u \otimes \overleftarrow{a_1} \otimes a_2) + g(u \otimes \overrightarrow{a_2} \otimes a_1) - g(u \otimes v \otimes a_1 a_2) = \\ \theta(u \otimes \overleftarrow{a_1} \otimes a_2) - u \theta(\overleftarrow{a_1} \otimes a_2) + \theta(u \otimes \overrightarrow{a_2} \otimes a_1) - \\ u \theta(\overrightarrow{a_2} \otimes a_1) - \theta(u \otimes v \otimes a_1 a_2) + u \theta(v \otimes a_1 a_2) = \\ (uv)h(a_1 \otimes a_2) - u(vh(a_1 \otimes a_2)) = 0. \end{aligned}$$

Dann verifiziert man die 1-Kozykelbedingung :

$$\begin{aligned} ug(v \otimes w \otimes a) - g(u \otimes vw \otimes a) + g(u \otimes v \otimes wa) = \\ u \theta(v \otimes w \otimes a) - u(v \theta(w \otimes a)) - \theta(u \otimes vw \otimes a) + \\ (uv)\theta(w \otimes a) + \theta(u \otimes vw \otimes a) - u \theta(v \otimes wa) = 0. \end{aligned}$$

Zuletzt die Äquivalenz von h_g und h :

$$\begin{aligned} h_g(a_1 \otimes a_2) = g(\overleftarrow{a_1} \otimes 1 \otimes a_2) + g(\overrightarrow{a_2} \otimes 1 \otimes a_1) = \\ \theta(\overleftarrow{a_1} \otimes a_2) + \theta(\overrightarrow{a_2} \otimes a_1) - \theta(1 \otimes a_1 a_2) \\ - \overleftarrow{a_1} \cdot \theta(1 \otimes a_2) - \overrightarrow{a_2} \cdot \theta(1 \otimes a_1) + \\ \theta(1 \otimes a_1 a_2) = \\ h(a_1 \otimes a_2) + \theta(1 \otimes a_1 a_2) - a_1 \theta(1 \otimes a_2) \\ - \theta(1 \otimes a_1) a_2. \end{aligned}$$

(γ) Die Charakterisierung (ii) von $\text{Im } \Lambda$:

Es genügt offenbar zu zeigen :

Ein T-Faktorsystem h von A in M ist zulässig

$$\Longleftrightarrow$$

$E_h(A, M)$ ist in eine Split-Erweiterung einbettbar

$\implies$:

Sei die Situation von (β) (b) gegeben.

$E_g(D(A), M)$ bezeichne den durch den 1-Kozykel g definierten U-Linksmodul (vgl. Schlußbemerkungen zu 2.2.1).

M ist U-Untermodul von $E_g(D(A), M)$, d.h. h kann als T-Faktorsystem von A in $E_g(D(A), M)$ aufgefaßt werden.

Dann ist $E_h(A, M)$ in $E_h(A, E_g(D(A), M))$ in der geforderten Weise eingebettet, und h ist als T -Faktorsystem von A in $E_g(D(A), M)$ trivial.

Die h trivialisierende k -lineare Abbildung

$\gamma \in \text{Hom}_k(A, E_g(D(A), M))$ ist definiert durch

$$\gamma(a) := -1 \otimes a \bmod Q \oplus -\Theta(1 \otimes a)$$

Es gilt nämlich

$$\gamma(a_1 a_2) = -1 \otimes a_1 a_2 \bmod Q \oplus + \Theta(1 \otimes a_1 a_2)$$

$$- a_1 \gamma(a_2) = \overleftarrow{a_1} \otimes a_2 \bmod Q \oplus a_1 \Theta(1 \otimes a_2) + g(\overleftarrow{a_1} \otimes 1 \otimes a_2)$$

$$- \gamma(a_1) a_2 = \overrightarrow{a_2} \otimes a_1 \bmod Q \oplus \Theta(1 \otimes a_1) a_2 + g(\overrightarrow{a_2} \otimes 1 \otimes a_1)$$

und damit fertig (vgl. (B) (b)!).

$\Longleftarrow$:

Sei nun $E_h(A, M)$ in Split-Erweiterung eingebettet.

Dann gibt es also U -Obermodul N von M und

$\gamma \in \text{Hom}_U(U \otimes A, N)$, so daß

$$h(a_1 \otimes a_2) = \gamma(\overleftarrow{a_1} \otimes a_2 + \overrightarrow{a_2} \otimes a_1 - 1 \otimes a_1 a_2)$$

• für alle $a_1, a_2 \in A$.

Bezeichne $p: N \longrightarrow M$ die k -lineare Projektion

Setze $\Theta = p\gamma \in \text{Hom}_k(U \otimes A, M)$

Dann gilt :

$$uh(a_1 \otimes a_2) = p(uh(a_1 \otimes a_2)) = \Theta(u(\overleftarrow{a_1} \otimes a_2 + \overrightarrow{a_2} \otimes a_1 - 1 \otimes a_1 a_2))$$

für alle $a_1, a_2 \in A$, $u \in U$, und damit fertig.

Damit ist Satz 2 vollständig bewiesen.

Korollar : wird $H^1(A, M) = \text{Ext}_U^1(D(A), M)$ in der am Ende von 2.2.1 angegebenen Weise mit $1\text{-Ext}(D(A), M)$ identifiziert, so ist die auf $\text{Im} \wedge$ definierte Umkehrabbildung von $\wedge: 1\text{-Ext}(D(A), M) \longrightarrow 1\text{-Ext}(A, M)$ nichts anderes als die Konstruktion der abgeleiteten Modulfolge (modulo Äquivalenz).

Beweis : Sei die Situation von (B)(b) im Beweis von Satz 2 gegeben.

Behauptung :

Die singuläre Erweiterung $E_g(D(A), M)$ von $D(A)$ durch M ist (modulo Äquivalenz) nichts anderes als die abgeleitete Modulfolge von $E_h(A, M)$.

Schreibe $E_h(A, M)$ als $0 \longrightarrow M \longrightarrow B \xrightarrow{\varphi} A \longrightarrow 0$

Dann gilt :

Die k -lineare Abbildung $\bar{\alpha} : U \otimes A \longrightarrow U \otimes B$

$$u \otimes a \longmapsto u \otimes a - 1 \otimes \theta(u \otimes a)$$

induziert k -linearen Schnitt $\alpha : D(A) \longrightarrow D_\varphi(B)$ wie aus den einschlägigen Definitionen leicht zu bestätigen (man beachte dabei, daß $u \otimes m = 1 \otimes um \mod Q$ gilt !).

$D_\varphi(B)$ ist somit k -direkte Summe von $\partial_j(M) = \text{Ker } \partial^j$ und $\alpha(D(A))$, und der dieser Erweiterung entsprechende 1-Kozykel $\bar{g} : U \otimes D(A) \longrightarrow \partial_j(M)$ ist definiert durch

$$\begin{aligned} \bar{g}(u \otimes v \otimes a \mod Q) &= u \alpha(v \otimes a \mod Q) - \alpha(u v \otimes a \mod Q) \\ &= u v \otimes a \mod Q_\varphi - u \otimes \theta(v \otimes a) \mod Q_\varphi \\ &\quad - u v \otimes a \mod Q_\varphi + 1 \otimes \theta(u v \otimes a) \mod Q_\varphi \\ &= 1 \otimes (\theta(u v \otimes a) - u \theta(v \otimes a)) \mod Q_\varphi \end{aligned}$$

Das heißt aber gerade, daß

$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\partial_j} D_\varphi(B) \xrightarrow{\partial_\varphi} D(A) \longrightarrow 0$ zu $E_g(D(A), M)$ äquivalent ist.

Man erhält somit nicht nur eine befriedigende Interpretation des ersten Kohomologieraumes der vorliegenden Theorie; Satz 2 und das anschließende Korollar liefern auch eine präzise und explizite Beschreibung der Beziehung zwischen singulärer Erweiterungstheorie einer T -Algebra A und singulärer Erweiterungstheorie ihres abgeleiteten Moduls $D(A)$.

In völlig analoger Weise erhält man (mit den natürlichen Modifikationen im Beweisgang) für die Theorien mit Involution bzw. Automorphismus der Periode 2 die Einbettung

von $H^1((A, \sigma), (M, \sigma))$ in $1\text{-Ext}((A, \sigma), (M, \sigma))$ und schließlich die entsprechenden Aussagen für die unitären Varianten.

Selbstverständlich gelten Satz 2 und das anschließende Korollar wörtlich auch für den Tripelsystemfall.

Es soll hier nur kurz skizziert werden, wie sich alles in völlig natürlicher Weise aus dem Algebrenfall überträgt.

Sei also T ein T -Tripelsystem, U seine universelle T -Multiplikationseinhüllende und M ein T -Trimodul von T .

$H^1(T, M) = \text{Ext}_U^1(D(T), M)$ werde wieder mit dem ersten Kohomologieraum des über die Bar-Auflösung von $D(T)$ definierten einschlägigen Kokettenkomplexes identifiziert, und die k -monomorphe Einbettung $\wedge: H^1(T, M) \rightarrow 1\text{-Ext}(T, M)$ ist dann sichergestellt auf Grund folgender Überlegungen:

Sei $g: U \otimes U \otimes T \rightarrow M$ ein 1-Kozykel ($g(U \otimes Q) = 0$)

Setze $h_g(a \otimes b \otimes c) := g(\overleftarrow{a \otimes b} \otimes 1 \otimes c) + g(\overleftarrow{a \otimes c} \otimes 1 \otimes b) + g(\overleftarrow{b \otimes c} \otimes 1 \otimes a)$

Dann gilt wieder

- (i) h_g ist T -Faktorsystem von T in M .
- (ii) Ist f ein 1-Korand, dann ist h_f trivial
- (iii) $h_g = 0 \Rightarrow g$ ist 1-Korand

Die Beweise sind mit Leichtigkeit aus dem Algebrenfall übertragbar; daher nur eine kurze Bemerkung zu (i):

Auch hier wird für $h = h_g$ und $\eta \in \text{Hom}(F, T)$ $h_{(\eta)}(T) = 0$ durch die Faktorisierung

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{h_{(\eta)}} & M \\ & \searrow \delta & \nearrow \bar{g} \\ & U \otimes T & \end{array}$$

mit $\delta(T) = 0$ nachgewiesen, wobei

$\bar{g}(u \otimes a) := g(u \otimes 1 \otimes a)$

und δ rekursiv folgendermaßen definiert ist:

$$\sigma x_i := 1 \otimes \eta x_i$$

$$\sigma r = [\sigma r_1, \eta r_2, \eta r_3] + [\eta r_1, \sigma r_2, \eta r_3] + [\eta r_1, \eta r_2, \sigma r_3]$$

falls $r = [r_1, r_2, r_3]$ gilt.

Alle weiteren Schlüsse laufen dann in völliger Analogie zum Algebrenfall.

Die Charakterisierung von $\text{Im } \wedge$ ergibt sich auch hier vermöge

- (a) Sei $h = h_g$ durch den 1-Kozykel g induziertes T-Faktorsystem von T in M , dann ist h auch zulässig, und $\theta(u \otimes a) := g(u \otimes 1 \otimes a)$ liefert (zF) für h .
- (b) Sei umgekehrt h zulässiges T-Faktorsystem von T in M , und sei $\theta \in \text{Hom}_k(U \otimes T, M)$ die die Zulässigkeit von h garantierende k -lineare Abbildung.

Werde $g \in \text{Hom}_k(U \otimes U \otimes T, M)$ durch

$$g(u \otimes v \otimes a) := \theta(uv \otimes a) - u\theta(v \otimes a) \text{ definiert.}$$

Dann ist g 1-Kozykel, und $h-h_g$ ist trivial.

Bezeichne des weiteren $E_g(D(T), M)$ den durch g definierten U-Linksmodul (vgl. Algebrenfall), dann kann h als T-Faktorsystem von T in $E_g(D(T), M)$ aufgefaßt werden, und $E_h(T, E_g(D(T), M))$ ist die Split-Erweiterung, in die $E_h(T, M)$ einbettbar ist (die h in $E_g(D(T), M)$ trivialisierende k -lineare Abbildung γ ist auch hier definiert durch $\gamma(a) := -1 \otimes a \bmod Q \otimes - \theta(1 \otimes a)$ für alle $a \in T$).

- (c) Ist $E_h(T, M)$ in eine Split-Erweiterung einbettbar, so folgt genauso wie im Algebrenfall die Zulässigkeit von h .

Das Korollar zu Satz 2 gilt natürlich wie im Algebrenfall; auf Einzelheiten soll hier verzichtet werden.

4.2 Zu den höheren Kohomologieräumen.

In diesem Abschnitt soll nur der Algebrenfall behandelt werden; alle Überlegungen und Resultate übertragen sich fast wörtlich auf den Tripelsystemfall und die Varianten im Algebrenfall.

Sei also $0 \longrightarrow N \longrightarrow F \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$ generische T-Erweiterung der T-Algebra A (mit universeller T-Multiplikationseinhüllenden U), $N \xrightarrow{\partial_j} D_\pi(F) \xrightarrow{\partial\pi} D(A) \longrightarrow 0$ die zugehörige abgeleitete Modulfolge, dann ist (vgl. Lemma 4) die exakte Folge $0 \longrightarrow \text{Ker } \partial_j \longrightarrow N \longrightarrow \text{Ker } \partial\pi \longrightarrow 0$ U-zerfallend und gibt zu einer U-direkten Zerlegung $N = N_0 \oplus N_1$ mit $N_0 = \text{Ker } \partial_j$, $N_1 \simeq \text{Ker } \partial\pi$ Anlaß.

Die so induzierte T-Nullerweiterung $0 \longrightarrow N_1 \hookrightarrow F_1 \xrightarrow{\pi_1} A \longrightarrow 0$ (vgl. Folgerung zu Lemma 4) heiße reduzierte generische T-Erweiterung der T-Algebra A.

Dann gilt :

Lemma 6 : $0 \longrightarrow N_1 \hookrightarrow F_1 \xrightarrow{\pi_1} A \longrightarrow 0$ ist zulässige

T-Nullerweiterung der T-Algebra A, und ihre abgeleitete Modulfolge

$$0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow D_{\pi_1}(F_1) \xrightarrow{\partial\pi_1} D(A) \longrightarrow 0$$

ist mit

$$0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow D_\pi(F) \xrightarrow{\partial\pi} D(A) \longrightarrow 0$$

identifizierbar.

Des weiteren ist $0 \longrightarrow N_1 \hookrightarrow F_1 \xrightarrow{\pi_1} A \longrightarrow 0$ generisch (im früher angegebenen Sinn) für alle zulässigen singulären T-Erweiterungen der T-Algebra A (durch T-Bimoduln M).

Beweis : Man geht aus von folgendem kommutativen Diagramm von Algebrenhomomorphismen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \hookrightarrow & F & \xrightarrow{\pi} & A \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \mathcal{P} & & \downarrow \mathcal{I} \\ 0 & \longrightarrow & N_1 & \hookrightarrow & F_1 & \xrightarrow{\pi_1} & A \longrightarrow 0 \end{array}$$

(mit $\text{Ker } \mathcal{P} = N_0$), das bekannterweise folgendes Diagramm von U-Modulhomomorphismen induziert :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & N_1 & \longrightarrow & D_\pi(F) & \xrightarrow{\partial\pi} & D(A) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow 1 & & \downarrow \partial_P & & \downarrow 1 \\
 & & N_1 & \longrightarrow & D_{\pi_1}(F_1) & \xrightarrow{\partial\pi_1} & D(A) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Die Surjektivität von p impliziert die Surjektivität von ∂_P , und da $\text{Ker } p = N_0$ gilt, erhält man $\text{Ker } \partial_P = U \otimes N_0 + Q_\pi = 0 + Q_\pi$ ($N_0 = \text{Ker } \partial j$!), d.h. ∂_P ist ein Isomorphismus.

Somit ist $0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow D_{\pi_1}(F_1) \xrightarrow{\partial\pi_1} D(A) \longrightarrow 0$ U-exakt und (via ∂_P) mit $0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow D_\pi(F) \xrightarrow{\partial\pi} D(A) \longrightarrow 0$ identifizierbar.

Sei nun schließlich $0 \longrightarrow M \longrightarrow B \xrightarrow{\varphi} A \longrightarrow 0$ eine zulässige singuläre T-Erweiterung der T-Algebra A.

Die Generizität von $0 \longrightarrow N \longrightarrow F \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$ liefert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & N_0 \oplus N_1 & \longrightarrow & F & \xrightarrow{\pi} & A \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow f_0 \quad \swarrow f_1 & & \downarrow \mu & & \downarrow 1 \\
 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\varphi} & A \longrightarrow 0
 \end{array}$$

das wiederum

$$\begin{array}{ccccccc}
 N_0 \oplus N_1 & \longrightarrow & D_\pi(F) & \xrightarrow{\partial\pi} & D(A) & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow f_0 \quad \swarrow f_1 & & \downarrow \partial\mu & & \downarrow 1 & & \\
 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & D_\varphi(B) & \xrightarrow{\partial\varphi} & D(A) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

induziert; die Exaktheit der unteren Zeile liefert nun sofort $f_0 = 0$, d.h. bereits $0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow F_1 \longrightarrow A \longrightarrow 0$ ist generisch für zulässige singuläre T-Erweiterungen von A.

Damit ist nun das notwendige Material für die folgende Definition und ihre Auswertung in Satz 3 bereitgestellt:

Sei $n \geq 2$. Eine n -fache singuläre T -Erweiterung der T -algebra A durch den T -Bimodul M von A heiße zulässig, falls sie äquivalent zu einer n -fachen singulären T -Erweiterung der Form

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \dots \longrightarrow X_1 \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\pi_1} A \longrightarrow 0 \text{ ist.}$$

Satz 3 : Sei A eine T -Algebra und M ein T -Bimodul von A .

Dann existiert für jedes $n \geq 1$ ein in M funktorieller k -Monomorphismus

$$\bigwedge_n : H^n(A, M) \longrightarrow n\text{-Ext}(A, M)$$

so daß $\text{Im} \bigwedge_n$ der k -Unterraum der Äquivalenzklassen zulässiger n -facher singulärer T -Erweiterungen in $n\text{-Ext}(A, M)$ ist.

Beweis : Für $n = 1$ ist bereits alles gezeigt (Satz 2).

Sei nun $n \geq 2$.

(α) Der k -Monomorphismus $\bigwedge_n$.

Betrachte eine globale generische T -Erweiterung

$$\longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_1 \longrightarrow F \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$$

von A , induziert durch die generische T -Erweiterung $0 \longrightarrow N \longrightarrow F \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$ und eine U -projektive Auflösung von N .

Betrachte daneben eine U -projektive Auflösung

$$\longrightarrow R_n \longrightarrow R_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow R_1 \longrightarrow D_n(F) \xrightarrow{\partial_n} D(A) \longrightarrow 0$$

von $D(A)$, induziert durch die abgeleitete Modulfolge $0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow D_n(F) \xrightarrow{\partial_n} D(A) \longrightarrow 0$ und eine U -projektive Auflösung von $N_1 = \text{Ker} \partial_n$.

Dann gilt (funktorielle Formulierung der Normalrepräsentantenargumentation, vgl. Schlußbemerkungen zu 2.2.2)

$$H^n(A, -) \simeq \text{Ext}_U^{n-1}(N_1, -)$$

$$n\text{-Ext}(A, -) \simeq \text{Ext}_U^{n-1}(N, -)$$

und des weiteren erhält man, da N_1 U -direkter Summand in N ist, die in M funktoriellen k -Monomorphismen $\text{Ext}_U^m(N_1, M) \hookrightarrow \text{Ext}_U^m(N, M)$

für alle $m \geq 0$, womit $\bigwedge_n$ für alle $n \geq 2$ gesichert ist.

Beachte : Der Isomorphismus $H^n(A, M) \simeq \text{Ext}_u^{n-1}(N_1, \dots)$ ist als mit der Yoneda-Interpretation verträglich gedacht und unterscheidet sich daher eventuell um ein Minuszeichen von dem über die lange exakte Kohomologiefolge gelieferten (vgl. dazu Hilton-Stammbach, [10], S. 153/154).

(B) Charakterisierung von $\text{Im } \bigwedge_n$.

Betrachte $\bigwedge_n$ als k -Monomorphismus von $n\text{-Ext}(D(A), M)$ in $n\text{-Ext}(A, M)$. Dann ist $\bigwedge_n$ durch die folgende Zuordnung n -facher singulärer Erweiterungen induziert:

$$\text{Sei } 0 \longrightarrow M \longrightarrow \dots \longrightarrow X_1 \longrightarrow D_n(F) \xrightarrow{\partial\pi} D(A) \longrightarrow 0$$

ein Normalrepräsentant für ein Element $E \in n\text{-Ext}(D(A), M)$.

Betrachte das Faserprodukt (pull-back)

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times_{N_1} N & \longrightarrow & N \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_1 & \longrightarrow & N_1 \end{array}$$

$$\text{Dann ist } 0 \longrightarrow M \longrightarrow \dots \longrightarrow X_1 \times_{N_1} N \longrightarrow F \xrightarrow{\tilde{\pi}} A \longrightarrow 0$$

ein Repräsentant von $\bigwedge_n E \in n\text{-Ext}(A, M)$, und natürlich ist dieser Repräsentant zu

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \dots \longrightarrow X_1 \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\pi_1} A \longrightarrow 0$$

äquivalent.

Enthalte umgekehrt $E' \in n\text{-Ext}(A, M)$ einen Repräsentanten der Form $0 \longrightarrow M \longrightarrow \dots$

$$\longrightarrow X_1 \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\pi_1} A \longrightarrow C,$$

dann ist klar, daß $E' = \bigwedge_n E$ mit

$$E = [0 \longrightarrow M \longrightarrow \dots \longrightarrow X_1 \longrightarrow D_n(F) \xrightarrow{\partial\pi} D(A) \longrightarrow C]$$

ist.

5. Kohomologisch zulässige Kategorien von Algebren und Tripelsystemen.

Der nun folgende Abschnitt ist der Diskussion des Falles gewidmet, in dem die vorliegende Kohomologietheorie voll als singuläre Erweiterungstheorie der jeweiligen Algebra bzw. des jeweiligen Tripelsystems interpretiert werden kann. Es handelt sich hier also im wesentlichen um eine etwas allgemeinere Fortführung der Arbeit [1] von M. Barr und G.S. Rinehart.

5.1 Kohomologische Zulässigkeit und kohomologische Trivialität.

5.1.1 Kohomologisch zulässige Algebren und Tripelsysteme.

Es soll wieder nur der Algebrenfall ausführlicher angegangen werden; hier ist der folgende Satz Ausgangspunkt aller weiteren Betrachtungen :

Satz 4 : Für eine T -Algebra A sind folgende Aussagen äquivalent :

- (1) Jede T -Nullerweiterung von A ist zulässig.
- (1') Für jeden T -Bimodul M von A und jedes T -Faktorsystem h von A in M gilt :
 h ist zulässig.
- (2) Jede T -Nullerweiterung von A ist in eine Split-Erweiterung einbettbar.
- (3) Die kanonische T -Erweiterung von A ist zulässig.
- (3') Das einer generischen T -Erweiterung der Form $E_g(A, N)$ entsprechende generische T -Faktorsystem g von A in N ist zulässig.
- (4) Die kanonische generische T -Erweiterung von A ist in eine Split-Erweiterung einbettbar.
- (5) Jede singuläre T -Erweiterung von A mit einem injektiven T -Bimodul Q von A ist trivial (zerfällt).

(6) Für alle $n \geq 1$ sind die Funktoren $H^n(A, -)$ und $n\text{-Ext}(A, -)$ natürlich äquivalent.

Beweis : Die Äquivalenz von (1), (1') und (2) sowie von (3), (3') und (4) ist wegen Satz 2 bzw. Lemma 5 klar.

(1) impliziert (3) und (3') impliziert (1') auf Grund der früher präzisierten Generizität von g .

Damit sind (1) - (4) äquivalent.

(2) und (5) sind äquivalent :

Gelte (2) und werde eine singuläre T -Erweiterung von A mit einem injektiven T -Bimodul Q von A in eine Split-Erweiterung eingebettet.

Dann wird Q im einschlägigen Obermodul als direkter (Modul-) Summand abgespaltet, was sofort die Trivialität der "größeren" Erweiterung auf die "kleinere" vererbt.

Gelte umgekehrt (5), dann liefert für jede T -Null-erweiterung von A eine Einbettung des Kernes in einen injektiven Obermodul das Gewünschte (d.h.(2)).

Schließlich impliziert (3) die Aussage (6) gemäß Satz 3 (nun sind ja generische T -Erweiterung und reduzierte generische T -Erweiterung von A jeweils identisch); umgekehrt hat (6) sofort (5) zur Folge ($1\text{-Ext}(A, Q) = H^1(A, Q) = 0$ für jeden injektiven T -Bimodul Q von A).

Damit ist Satz 4 vollständig bewiesen.

Eine T -Algebra A , die die äquivalenten Bedingungen von Satz 4 erfüllt, heie (im Sinne der vorliegenden Kohomologietheorie) kohomologisch zulässig.

Analog definiert und charakterisiert sich die kohomologische Zulässigkeit eines T -Tripelsystems T .

Die jeweils nur begrifflichen Modifikationen bei den Varianten im Algebrenfall sind klar.

Satz 4 hat einige interessante Korollare, die nur für den

Algebrenfall formuliert und bewiesen werden sollen.

Korollar 1 : Kohomologische Zulässigkeit ist eine lineare Eigenschaft; präzise :
 Sei A eine T -Algebra über k , $k \hookrightarrow l$ eine Körpererweiterung.
 Dann gilt :
 A kohomologisch zulässig $\iff$
 $A_1 = l \otimes A$ kohomologisch zulässig (in $T\text{-Alg } l$).

Beweis : Sei $0 \rightarrow N \hookrightarrow F \xrightarrow{\pi} A \rightarrow 0$ die kanonische generische T -Erweiterung von A (über k).
 Dann ist $0 \rightarrow N_1 \rightarrow F_1 \xrightarrow{\pi_l} A_1 \rightarrow 0$ eine generische T -Erweiterung von A_1 (über l).
 Sei g ein einschlägiges generisches T -Faktorsystem von A in N , dann ist dessen l -Fortsetzung g_1 das entsprechende generische T -Faktorsystem von A_1 in N_1 . Die Zulässigkeit von g ist aber offenbar mit der von g_1 äquivalent (man beachte, daß die universelle T -Multiplikationseinhüllende von A_1 gerade U_1 ist, wobei U die universelle T -Multiplikationseinhüllende von A bedeute).

Korollar 2 : Homomorphe Bilder kohomologisch zulässiger T -Algebren bei zerfallenden Epimorphismen sind wieder kohomologisch zulässig.

Beweis : Sei $\varphi \in \text{Hom}(B, A)$ ein zerfallender Epimorphismus von T -Algebren, und sei B kohomologisch zulässig. Dann ist $U(\varphi) \in \text{Hom}(U(B), U(A))$, der von φ zwischen den universellen T -Multiplikationseinhüllenden induzierte Epimorphismus von unitären assoziativen Algebren, ebenfalls zerfallend (Funktorialität der Zuordnung $\varphi \mapsto U(\varphi)$). Damit ist aber klar, wie der Zulässigkeitsnachweis für ein T -Faktorsystem von A in einen $U(A)$ -Linksmodul M

durch zweimaliges pull-back (mittels φ bzw. $U(\varphi)$ und mittels des einschlägigen Algebrenschnitts) zu erbringen ist.

Bemerkung : Die Existenz eines Algebrenschnitts in Korollar 2 ist keine unnötige Forderung. Homomorphe Bilder von kohomologisch zulässigen $\mathbf{T}$ -Algebren brauchen im allgemeinen nicht mehr kohomologisch zulässig zu sein, wie weiter unten gezeigt wird. .

Korollar 3 : Der induktive Limes von kohomologisch zulässigen $\mathbf{T}$ -Algebren ist wieder eine kohomologisch zulässige $\mathbf{T}$ -Algebra.

Beweis : Sei $A = \varinjlim A_i$, dann kann in natürlicher Weise identifiziert werden

$$A \otimes A = \varinjlim A_i \otimes A_i$$

$$U = \varinjlim U_i$$

$$U \otimes A = \varinjlim U_i \otimes A_i$$

(wobei U_i die universelle $\mathbf{T}$ -Multiplikationseinhüllende des jeweiligen A_i , U die universelle $\mathbf{T}$ -Multiplikationseinhüllende von A sei; vgl. dazu auch N. Jacobson [12], S. 71 bzw. S. 91).

Sei nun M ein U -Linksmodul, h ein $\mathbf{T}$ -Faktorsystem von A in M , dann muß die Existenz von $\theta \in \text{Hom}_k(U \otimes A, M)$ nachgewiesen werden, so daß h und θ vermöge (zF) verbunden sind.

Das ist aber auf Grund der oben angeführten Identifikationen und der Zulässigkeit der A_i ein klassischer Induktiver-Limes-Schluß (Auffächerung von h in $h_i: A_i \otimes A_i \xrightarrow{M} \varphi_i - \varphi_i: A_i \rightarrow A$ kanonisch - , Sicherstellung des jeweiligen die Zulässigkeit von h_i garantierenden θ_i und "Rückbündelung" der θ_i zum behaupteten θ).

Bemerkung : Eine T -Algebra A ist also kohomologisch zulässig, falls nur jede endlich erzeugte Unter-
algebra von A kohomologisch zulässig ist. Eine
irgendwie geartete Umkehrung davon gilt aller-
dings nicht : Unteralgebren von kohomologisch
zulässigen T -Algebren brauchen nicht mehr koho-
mologisch zulässig zu sein, wie an einem spä-
teren Beispiel zu sehen sein wird.

Es ist klar, wie sich alles auf den Tripelsystemfall über-
trägt. Zu den Varianten im Algebrenfall sei noch folgendes
Lemma angeführt :

Lemma 7 : Sei (A, σ) eine T -Algebra mit Involution bzw.
Automorphismus der Periode 2.
Dann ist (A, σ) in $(T\text{-Alg } k)_\sigma$ kohomologisch
zulässig, falls nur A bereits in $T\text{-Alg } k$ koho-
mologisch zulässig ist.

Beweis : Dies folgt unmittelbar aus einer unter 4.1.1
gemachten Anmerkung, wonach nämlich ein
 T -Faktorsystem h von (A, σ) in $(M, \sigma) \in /T\text{-Mod}(A, \sigma)/$
genau dann zulässig ist, wenn es bereits als
 T -Faktorsystem von A in M zulässig ist.

5.1.2 Kohomologisch triviale Algebren und Tripelsysteme.

Die kohomologische Trivialität einer T -Algebra A liege vor,
wenn die durch die nachfolgenden äquivalenten Bedingungen
beschriebene Situation gegeben ist :

- (1) Jede T -Nullerweiterung von A zerfällt,
- (2) Zu jeder T -Nullerweiterung von A ist die abgeleitete
Modulfolge eine zerfallende Modulerweiterung.
- (3) Für jeden T -Bimodul M von A ist jedes T -Faktorsystem h
von A in M trivial.
- (4) Die kanonische generische T -Erweiterung von A zer-
fällt.
- (5) Das einer generischen T -Erweiterung der Form $E_g(A, N)$

entsprechende generische T -Faktorsystem g von A in N ist trivial.

- (6) A ist kohomologisch zulässig, und $D(A)$ ist U -projektiv, d.h. $\text{Der}(A, -)$ ist exakt.
- (7) A ist kohomologisch zulässig, und für jeden T -Bimodul M von A sind alle Derivationen von A in M innere.
- (8) A ist kohomologisch zulässig, und es gilt $H^n(A, M) = 0$ für alle T -Bimoduln M von A und alle $n \geq 1$.

Die Äquivalenz der aufgeführten Aussagen ist nach allem bisher Gesagten sofort einsichtig. Analoge Charakterisierungen gelten für den Tripelsystemfall und in den Varianten des Algebrenfalls.

Bemerkung :

Will man für kohomologisch triviale T -Algebren A automatisch so etwas wie die beiden Whitehead-Lemmas

$(\text{Der}(A, -) = \partial\text{-Inder}(A, -) \text{ und } 1\text{-Ext}(A, -) = 0)$

gesichert haben, so ist der oben definierte Begriff der kohomologischen Trivialität der natürliche, obwohl sich zuallererst der schwächere Begriff gemäß " $H^n(A, -) = 0$ für alle $n \geq 1$, d.h. $\text{Der}(A, -)$ exakt" anböte.

Beispiel einer T -Algebra A , die nicht kohomologisch zulässig ist, und die $H^n(A, -) = 0$ für alle $n \geq 1$ erfüllt :

Sei A eine endlichdimensionale inseparable Körpererweiterung des Grundkörpers k (klar, wie k beschaffen sein muß), aufgefaßt als Objekt in der Kategorie der unitären kommutativen und assoziativen Algebren über k .

Die unitäre universelle kommutative und assoziative Multiplikationseinhüllende von A kann mit A identifiziert werden, und deren Halbeinfachheit impliziert sofort die Exaktheit von $\text{Der}(A, -)$ sowie die Injektivität des regulären Bimoduls A . Nach einem Ergebnis von M. Gerstenhaber (vgl. die Arbeit [7]) gilt aber $1\text{-Ext}(A, A) \neq 0$, d.h. A ist nicht kohomologisch zulässig in der Kategorie der unitären kommutativen und assoziativen Algebren über k .

Nachdem freie T -Algebren natürlich immer kohomologisch trivial, insbesondere also kohomologisch zulässig sind, erhält man in jeder Kategorie von T -Algebren (oder T -Tripelsystemen), wo nicht kohomologisch zulässige Objekte existieren, sofort Beispiele dafür, daß homomorphe Bilder von kohomologisch zulässigen Objekten nicht mehr kohomologisch zulässig zu sein brauchen (vgl. z.B. obigen Fall).

5.2 Beispiele kohomologisch zulässiger Kategorien von Algebren und Tripelsystemen.

Eine Kategorie von T -Algebren bzw. von T -Tripelsystemen heie kohomologisch zulässig, falls alle Objekte darin kohomologisch zulässig sind.

5.2.1 Unitäre assoziative Algebren und Lie-Algebren.

(a) Unitäre assoziative Algebren.

Sei A eine unitäre assoziative Algebra, $U_1 = A \otimes A^0$ ihre unitäre universelle assoziative (Standard-) Multiplikationseinhüllende, M ein unitärer assoziativer Bimodul von A und h ein unitäres assoziatives Faktorsystem von A in M , d.h. es gilt :

$$h(a \otimes b)c + h(ab \otimes c) = ah(b \otimes c) + h(a \otimes bc)$$

für alle $a, b, c \in A$.

Man identifiziere $U_1 \otimes A$ mit $A \otimes A \otimes A$ (die äußeren Faktoren sind die U_1 -Faktoren !)
und definiere $\theta \in \text{Hom}_K(A \otimes A \otimes A, M)$ durch

$$\theta(b_1 \otimes a \otimes b_2) = b_1 h(a \otimes b_2) - h(b_1 \otimes a \otimes b_2) + h(b_1 \otimes a \otimes b_2)$$

Dann gilt :

$$b_1 h(a_1 \otimes a_2) b_2 = \theta(b_1 (a_1 \otimes a_2 \otimes 1 + 1 \otimes a_1 \otimes a_2 - 1 \otimes a_1 a_2 \otimes 1) b_2)$$

d.h. h ist zulässig.

Zur Nachrechnung :

$$\begin{aligned} \theta(b_1 a_1 \otimes a_2 \otimes b_2 + b_1 \otimes a_1 a_2 \otimes b_2 - b_1 \otimes a_1 a_2 \otimes b_2) = \\ (b_1 a_1) h(a_2 \otimes b_2) - h(b_1 a_1 a_2 \otimes b_2) + h(b_1 a_1 \otimes a_2 b_2) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & b_1 h(a_1 \otimes a_2 b_2) - h(b_1 a_1 \otimes a_2 b_2) + h(b_1 \otimes a_1 a_2 b_2) - \\
 & b_1 h(a_1 a_2 \otimes b_2) + h(b_1 a_1 a_2 \otimes b_2) - h(b_1 \otimes a_1 a_2 b_2) = \\
 & (b_1 a_1) h(a_2 \otimes b_2) + b_1 h(a_1 \otimes a_2 b_2) - b_1 h(a_1 a_2 \otimes b_2) = \\
 & b_1 (a_1 h(a_2 \otimes b_2) + h(a_1 \otimes a_2 b_2) - h(a_1 a_2 \otimes b_2)) = \\
 & b_1 h(a_1 \otimes a_2) b_2.
 \end{aligned}$$

Damit ist die Kategorie der unitären assoziativen Algebren über dem Körper k kohomologisch zulässig (vgl. auch Barr-Rinehart [1]).

Die Hochschild-Kohomologie einer unitären assoziativen Algebra A wird (vgl. z.B. Cartan-Eilenberg [4]) durch die exakt verbundene Folge $(\tilde{H}^n(A, -)) = (\text{Ext}_{U_1}^n(A, -))_{n \geq 0}$ der rechtsabgeleiteten Funktoren von $\text{Hom}_{U_1}(A, -)$ definiert.

Für $n \geq 1$ gilt dann : $H^n(A, -) \simeq \tilde{H}^{n+1}(A, -)$

Zum Beweis vgl. Barr-Rinehart [1].

Diese funktorielle Isomorphie erlaubt eine erfreuliche und befriedigende Informationsübertragung, als deren erstes Beispiel sich sofort die Charakterisierung der kohomologisch trivialen endlichdimensionalen unitären assoziativen Algebren A über dem Körper k ergibt (vgl. Cartan-Eilenberg [4], S.179) :

A kohomologisch trivial $\iff A$ separabel.

(b) Unitäre assoziative Algebren mit Involution.

Wegen (a) und Lemma 7 ist auch die Kategorie der unitären assoziativen Algebren mit Involution kohomologisch zulässig.

(c) Lie-Algebren.

Sei A eine Lie-Algebra, U ihre universelle Lie-Multiplikationseinhüllende, M ein unitärer U -Linksmodul (Lie-Bimodul von A), h ein Lie-Faktorsystem von A in M , d.h. es gilt : $h(a \otimes a) = 0$, insbesondere $h(a \otimes b) = -h(b \otimes a)$

$$h([a,b] \otimes c) + h([b,c] \otimes a) + h([c,a] \otimes b) + ah(b \otimes c) \\ + bh(c \otimes a) + ch(a \otimes b) = 0 \quad \text{für alle } a, b, c \in A.$$

Dann ist h zulässig, d.h. es gibt $\Theta \in \text{Hom}_k(U \otimes A, M)$,
so daß $uh(a_1 \otimes a_2) = \Theta(u(a_1 \otimes a_2 - a_2 \otimes a_1 - 1 \otimes [a_1, a_2]))$
für alle $a_1, a_2 \in A$, $u \in U$ gilt (A als Unter algebra
von U^- betrachtet).

Sei eine linear geordnete k -Basis $B = \{x_i, i \in I\}$
von A gegeben, dann ist $\{x_1 \dots x_n, x_1 \leq \dots \leq x_n, x_i \in B\}$
eine k -Basis von U .

Bezeichne U_n für $n \geq 0$ den k -Unterraum von U , der
von den Produkten mit höchstens n Faktoren aus B
aufgespannt wird; man erhält damit eine Filtrierung
von U .

Dann werde Θ rekursiv (bezüglich der U_n) definiert
durch

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad & \Theta(1 \otimes x) = 0 \text{ für alle } x \in B \\ (\beta) \quad & \Theta(x_1 \dots x_n \otimes x) = 0 \text{ falls } x_n \leq x \\ (\gamma) \quad & \Theta(x_1 \dots x_n \otimes x) = \Theta(x_1 \dots x_{n-1} \otimes x_n) + \Theta(x_1 \dots x_{n-1} \otimes [x_n, x]) \\ & + x_1 \dots x_{n-1} h(x_n \otimes x) \\ & \text{falls } x < x_n. \end{aligned}$$

(man beachte, daß für $x < x_n$ gilt :

$$x_1 \dots x_{n-1} x - x_1 \dots x_{i-1} x x_i \dots x_{n-1} \in U_{n-1} \\ \text{für } x_{i-1} \leq x < x_i$$

sodaß die Definition tatsächlich rekursiv ist).

$$\text{Die Zulässigkeitsbedingung } uh(a_1 \otimes a_2) = \Theta(ua_1 \otimes a_2 - ua_2 \otimes a_1 \\ - u \otimes [a_1, a_2])$$

für alle $a_1, a_2 \in A$, $u \in U$

wird nun durch Induktion gemäß der Filtrierung von U
nachgewiesen (vgl. dazu wieder Barr-Rinehart [1]).

Damit ist die Kategorie der Lie-Algebren über dem
Körper k kohomologisch zulässig.

Die Hochschild-Kohomologie einer Lie-Algebra A wird (vgl. Cartan-Eilenberg [4]) durch die exakt verbundene Folge $(\check{H}^n(A, -)) = (\text{Ext}_U^n(k, -))_{n \geq 0}$ der rechtsabgeleiteten Funktoren von $\text{Hom}_U(k, -)$ definiert (k ist U -Linksmodul über die Augmentationsfolge $0 \longrightarrow I \longrightarrow U \longrightarrow k \longrightarrow 0$).

Für $n \geq 1$ gilt auch hier : $H^n(A, -) \simeq \check{H}^{n+1}(A, -)$.

Zum Beweis vergleiche wieder Barr-Rinehart [1] .

Wie im unitären assoziativen Fall ist somit auch im Lie-Fall der gesamte bekannte klassische Apparat für die vorliegende Kohomologietheorie verfügbar; man erhält deshalb sofort :

Sei A eine endlichdimensionale Lie-Algebra über dem Körper k .

Dann gilt : A kohomologisch trivial $\iff \dim_k A \leq 1$ (vgl. dazu Cartan-Eilenberg [4], S. 283).

Man beachte dazu, daß die für halbeinfache Lie-Algebren über Körpern k der Charakteristik 0 geltenden beiden Whitehead-Lemmas streng die Endlichdimensionalität der Koeffizientenmoduln zur Voraussetzung haben.

Eine 1-dimensionale Lie-Algebra ist also kohomologisch trivial, besitzt aber Derivationen (in ihre universelle Lie-Multiplikationseinhüllende), die nicht klassisch innere sind.

(d) Lie-Algebren mit Automorphismus der Periode 2.

Wegen (c) und Lemma 7 ist auch die Kategorie der Lie-Algebren mit Automorphismus der Periode 2 über dem Körper k ($\text{char } k \neq 2$) kohomologisch zulässig. Die vorliegende Kohomologietheorie für Lie-Algebren mit Automorphismus der Periode 2 ist dann zu der von B.Harris in [9] beschriebenen Kohomologietheorie in gleicher Weise äquivalent, wie sie im Falle der unitären assoziativen Algebren und der Lie-Algebren zur klassischen Hochschild-Kohomologie äquivalent ist.

Das soll im folgenden kurz präzisiert werden (vgl. an allen fraglichen Stellen B. Harris [9]).

Sei (L, σ) eine Lie-Algebra mit Automorphismus der Periode 2, und sei U deren universelle Lie-Multiplikationseinhüllende, $U_\sigma = U \rtimes U^\sigma$ die daraus gebildete universelle Lie-Multiplikationseinhüllende mit Automorphismus der Periode 2.

Es gilt also in U_σ : $s^2 = 1$, $su = u^\sigma s$ für alle $u \in U$, wobei $u \mapsto u^\sigma$ den durch σ auf U induzierten

Automorphismus der Periode 2 bezeichnet.

U_σ besitzt die beiden orthogonalen Idempotenten

$$e = \frac{1}{2}(1+s), \quad f = \frac{1}{2}(1-s) \quad \text{mit } 1 = e+f.$$

Insbesondere ist also $U_\sigma e$ U_σ -projektiver U_σ -Linksmodul.

Man betrachte nun die aus der normalen Lie-Theorie bekannte Augmentationsfolge $0 \rightarrow I \rightarrow U \rightarrow k \rightarrow 0$.

Daraus läßt sich eine Augmentationsfolge

$$0 \rightarrow I_\sigma \rightarrow U_\sigma \rightarrow k \rightarrow 0 \quad (\text{mit } s \mapsto 1)$$

ableiten, und es gilt : $I_\sigma = I + Is + kf$.

k wird dadurch zu einem U_σ -Linksmodul, und man erhält eine kurze exakte Folge von U_σ -Linksmoduln vermöge $0 \rightarrow I_\sigma e \rightarrow U_\sigma e \rightarrow k \rightarrow 0$.

Nun gilt : $I_\sigma e \cong D(L, \sigma)$ als U_σ -Linksmoduln.

Dazu zeigt man : Für jeden Lie-Modul mit Automorphismus der Periode 2 (M, σ) von (L, σ) gilt :

$$\text{Der}((L, \sigma), (M, \sigma)) \cong \text{Hom}_{U_\sigma}(I_\sigma e, (M, \sigma))$$

"kanonisch" und funktoriell in (M, σ) .

Zuallererst gilt $I_\sigma e = Ie$ wegen $se = e$, und man erhält eine kanonische Derivation ∂ von (L, σ) in $I_\sigma e$ durch die Zuordnung $a \mapsto ae$.

Damit ist für jedes $f \in \text{Hom}_{U_\sigma}(I_\sigma e, (M, \sigma))$

$d = f \circ e \in \text{Der}((L, \sigma), (M, \sigma))$.

Sei umgekehrt $d \in \text{Der}((L, \sigma), (M, \sigma))$; dann ist d zuerst einmal sicher zu $f' \in \text{Hom}_U(I, M)$ fortsetzbar (vgl. z.B. Hilton-Stammbach [10], S. 234).

Definiere $f \in \text{Hom}_U(I_{\sigma}e, (M, \sigma))$ durch $f(ue) := f'(u)$ ($I_{\sigma}e = Ie$ ist ja freier U -Linksmodul, also unzweideutige Definition; überdies gilt: $f(sue) = f(u^{\sigma}e) = f'(u^{\sigma}) = \sigma f'(u)$ auf Grund der Definition von f' aus d und der Vertauschbarkeit von d mit den Automorphismen der Periode 2, so daß f tatsächlich U_{σ} -Homomorphismus ist).

Die beiden so beschriebenen Zuordnungen sind k -linear, zueinander invers und funtoriell in (M, σ) , wie leicht nachprüfbar ist.

Sei nun $(\tilde{H}^n((L, \sigma), -)) = (\text{Ext}_{U_{\sigma}}^n(k, -))_{n \geq 0}$ die exakt verbundene Folge der Harrisschen n -ten Kohomologiefunktoren zu (L, σ) , so erhält man genauso wie in den bereits besprochenen Fällen für alle $n \geq 1$ funktorielle Isomorphismen

$$H^n((L, \sigma), -) \simeq H^{n+1}((L, \sigma), -)$$

induziert durch die verbindenden Homomorphismen der langen exakten Ext-Kohomologiesequenz bezüglich $0 \longrightarrow I_{\sigma}e \longrightarrow U_{\sigma}e \longrightarrow k \longrightarrow 0$ in der ersten Variablen.

Das Korollar 2.1 der Harrisschen Arbeit [9] liefert dann folgende "natürliche" Rekursionsformel für die Kohomologieräume der vorliegenden Theorie:

Sei (M, σ) U_{σ} -Linksmodul, und betrachte $\text{Hom}_k(I_{\sigma}e, (M, \sigma))$ mit der bei Harris angegebenen U_{σ} -Linksmodulstruktur. Dann gilt

$$H^{n+1}((L, \sigma), (M, \sigma)) \simeq H^n((L, \sigma), \text{Hom}_k(I_{\sigma}e, (M, \sigma)))$$

für alle $n \geq 0$ funktoriell in (M, σ) .

(e) p-Lie-Algebren.

Die kohomologische Zulässigkeit der Kategorie der p-Lie-Algebren ist eines der Ergebnisse der Arbeit [21] von B. Pareigis. In 1.3.3 wurde kurz skizziert, inwieweit auch der Fall der p-Lie-Algebren in den Rahmen der Überlegungen und Ergebnisse der vorliegenden Arbeit paßt.

5.2.2 Lie-Tripelsysteme.

Im folgenden soll zunächst die kohomologische Zulässigkeit der Kategorie der Lie-Tripelsysteme über einem Körper k der Charakteristik $\neq 2$ gezeigt werden.

Sei T ein Lie-Tripelsystem über k , und bezeichne $(SL(T), \sigma)$ die Standard-Lie-Einhüllende (mit Automorphismus der Periode 2) von T (vgl. dazu K.Meyberg [20]). Betrachte zu einem Lie-Tripelmodul M von T die kanonische Split-Erweiterung $E = E(T, M)$.

$(SL(E), \sigma)$ kann dann in der Form $E((SL(T), \sigma), (M_S, \sigma))$ geschrieben werden, und der Lie-Modul mit Automorphismus der Periode 2 (M_S, σ) von $(SL(T), \sigma)$ ist dabei das σ -invariante Ideal $L(T \otimes M) \oplus M$ von $SL(E)$.

Man beachte, daß $M = (M_S, \sigma)_-$, der Raum der σ -ungeraden Elemente von (M_S, σ) ist.

Sei nun des weiteren $(UL(T), \sigma)$ die universelle Lie-Einhüllende (mit Automorphismus der Periode 2) des Lie-Tripelsystems T (vgl. N. Jacobson [12], S. 310, oder B.Harris [9]), dann kann jeder Lie-Modul mit Automorphismus der Periode 2 von $(SL(T), \sigma)$ über den kanonischen Epimorphismus $(UL(T), \sigma) \longrightarrow (SL(T), \sigma)$ (Fortsetzung der Identität auf T) als Lie-Modul mit Automorphismus der Periode 2 von $(UL(T), \sigma)$ betrachtet werden; insbesondere gilt das für die Moduln der Form (M_S, σ) , wo M Lie-Tripelmodul von T ist.

Das Lemma zu Theorem 3.2 der Arbeit [9] von B. Harris liefert nun die für den nachfolgenden Satz entscheidende Information :

Zu jeder singulären Lie-Tripelerweiterung

$0 \longrightarrow M \longrightarrow V \xrightarrow{\varphi} T \longrightarrow 0$ des Lie-Tripelsystems T gibt es eine singuläre Lie-Erweiterung mit Automorphismus der Periode 2 von $(UL(T), \sigma)$ der Form

$$0 \longrightarrow (M_S, \sigma) \longrightarrow (G, \sigma) \longrightarrow (UL(T), \sigma) \longrightarrow 0$$

dergestalt, daß die vorgegebene singuläre Lie-Tripelerweiterung zu $0 \longrightarrow M \longrightarrow (G, \sigma)_- \longrightarrow T \longrightarrow 0$ äquivalent ist (die Exaktheit des durch die Zuordnung $(L, \sigma) \longrightarrow (L, \sigma)_-$ induzierten Funktors ist klar).

Damit erhält man den

Satz 5 : Jedes Lie-Tripelsystem T (über dem Körper k) ist kohomologisch zulässig.

Beweis : Betrachte zu singulärer Lie-Tripelerweiterung

$0 \longrightarrow M \longrightarrow V \xrightarrow{\varphi} T \longrightarrow 0$ von T die auf Grund der kohomologischen Zulässigkeit von $(UL(T), \sigma)$ (vgl. 5.2.1 (d)) gesicherte Einbettung in eine Split-Erweiterung

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (M_S, \sigma) & \longrightarrow & (G, \sigma) & \longrightarrow & (UL(T), \sigma) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \wr \\ 0 & \longrightarrow & (Q, \sigma) & \longrightarrow & (H, \sigma) & \longrightarrow & (UL(T), \sigma) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Man erhält daraus sofort die folgende Einbettung in eine Split-Erweiterung

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & (G, \sigma)_- & \longrightarrow & T \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \wr \\ 0 & \longrightarrow & (Q, \sigma)_- & \longrightarrow & (H, \sigma)_- & \longrightarrow & T \longrightarrow 0 \end{array}$$

und damit die Zulässigkeit von $0 \longrightarrow M \longrightarrow V \xrightarrow{\varphi} T \longrightarrow 0$.

Abschließend noch einige Bemerkungen betreffend das Verhalten der vorliegenden Kohomologietheorie zu der von B. Harris:

Für ein Lie-Tripelsystem T und einen Lie-Tripelmodul M von T definiert Harris (vgl. [9]) den n -ten Kohomologieraum durch $\tilde{H}^n(T, M) := \text{Ext}_{U_\sigma}^n(k, (M_S, \sigma))$, $n \geq 0$, wobei U_σ

die universelle Lie-Multiplikationseinhüllende mit Automorphismus der Periode 2 von $(UL(T), \sigma)$ ist.

Diese Definition erscheint durch die von Harris beigebrachten Ergebnisse gerechtfertigt, ist aber letztlich kohomologisch unnatürlich, da keine lange exakte Kohomologiesequenz zur Verfügung steht (d.h. die Folge $(H^n(T, -))_{n \geq 0}$ ist nicht exakt verbunden). Das liegt daran, daß eine kurze exakte Folge $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ von Lie-Tripelmoduln für T im allgemeinen nicht in eine exakte Folge $0 \rightarrow (M'_S, \sigma) \rightarrow (M_S, \sigma) \rightarrow (M''_S, \sigma) \rightarrow 0$ von U_σ -Linksmoduln übergeht (der kritische Punkt ist nur die Exaktheit in der Mitte); dazu folgendes Beispiel :

Betrachte den Lie-Modul $V = ke \oplus kf \oplus kg$ von $L_0 = k1$, wobei $[1, e] = [1, f] = 0$ und $[1, g] = f$ gelten soll.

Setze $L = E(L_0, V)$, und sei T das durch L gegebene Lie-Tripelsystem (mit $[x, y, z] := [[x, y], z]$).

$V' = ke \oplus kf$ und V sind Ideale von L , können also als Lie-Tripelmoduln M' und M von T betrachtet werden.

Die so definierte kurze exakte Folge $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ induziert $0 \rightarrow (M'_S, \sigma) \rightarrow (M_S, \sigma) \rightarrow (M''_S, \sigma) \rightarrow 0$,

und diese Folge ist aus Dimensionsgründen nicht mehr exakt, da $M'_S = M'$, $M''_S = M''$, aber $M_S \neq M$ gilt.

Damit ist mit der vorliegenden Kohomologietheorie für Lie-Tripelsysteme zum ersten Mal auch eine Situation aufgezeigt, wo unser Ansatz qualitative Verbesserungen gegenüber "klassischen" Ansätzen liefert.

6. Der Fall der Jordan-Algebren.

In diesem letzten Abschnitt soll die kohomologische Zulässigkeit von unitären Jordan-Algebren über einem Körper k der Charakteristik $\neq 2$ diskutiert werden. Da einesteils eine große Klasse unitärer Jordan-Algebren als kohomologisch zulässig erkannt ist, anderenteils aber verhältnismäßig unkomplizierte nicht kohomologisch zulässige Objekte existieren, erscheint die struktura-theoretische Charakterisierung der kohomologisch zulässigen unitären Jordan-Algebren ein interessantes Problem. Die hier angeschnittenen Lösungssätze verstehen sich als Fortführung der Arbeit [8] von N.Glassman.

6.1 Die kohomologische Zulässigkeit der Jordan-Matrixalgebren vom Grad ≥ 4 .

Sei A eine unitäre Jordan-Algebra, b ein invertierbares Element von A .

$A^{(b)}$ bezeichne das b -Isotop von A , d.h. die unitäre Jordan-Algebra, die entsteht, wenn auf dem k -Vektorraum A die von der ursprünglichen Multiplikation abgeleitete Komposition

$$a_1 \cdot_b a_2 = (a_1 \cdot b) \cdot a_2 + a_1 \cdot (b \cdot a_2) - (a_1 \cdot a_2) \cdot b$$

eingeführt wird (bezüglich Einzelheiten vgl. Braun-Koecher [3] oder N.Jacobson [12]).

Dann gilt das

Lemma 8 : A ist kohomologisch zulässig $\iff A^{(b)}$ ist kohomologisch zulässig

Beweis : Sei $k \hookrightarrow \bar{k}$ eine Körpererweiterung mit algebraisch abgeschlossenem $\bar{k}$: Es gilt

$$(A^{(b)})_{\bar{k}} = (A_{\bar{k}})^{(b)}, \text{ und, da } \bar{k} \text{ algebraisch abgeschlossen ist, } A_{\bar{k}} \simeq (A_{\bar{k}})^{(b)}$$

(vgl. Braun-Koecher [3], S.166).

Wegen Korollar 1 zu Satz 4 ist damit alles klar.

Im folgenden soll die kohomologische Zulässigkeit einer Klasse von Jordan-Matrixalgebren als Konsequenz der koho-

molekulischen Zulässigkeit der unitären assoziativen Algebren mit Involution nachgewiesen werden.

Sei dazu von nun an $\tilde{n} \geq 4$ fest gegeben.

Sei (D, σ) eine unitäre assoziative Algebra mit Involution.

D_n - die Matrixalgebra von Rang n mit Koeffizienten in D - besitzt dann eine sogenannte Standardinvolution $\sum$, die jedem $x \in D_n$ die Matrix $\bar{x}^t \in D_n$ zuordnet (koeffizientenweise σ -Operation und Transposition).

$H_n(D, \sigma)$ bezeichne die Unteralgebra der speziellen Jordan-Algebra D_n^+ (mit Multiplikation $x \cdot y = \frac{1}{2}(xy + yx)$), die durch die $\sum$ -invarianten Elemente von D_n definiert wird.

Ein Homomorphismus $\varphi: (E, \sigma) \rightarrow (D, \sigma)$ von unitären assoziativen Algebren mit Involution induziert kanonisch (d.h. durch komponentenweise φ -Anwendung) einen Homomorphismus $H_n(\varphi): H_n(E, \sigma) \rightarrow H_n(D, \sigma)$, so daß H_n als kovarianter Funktor von der Kategorie der unitären assoziativen Algebren mit Involution in die Kategorie der unitären Jordan-Algebren aufgefaßt werden kann.

Sei nun b ein invertierbares Element von $A = H_n(D, \sigma)$.

Dann wird durch die Zuordnung $x \mapsto b^{-1} \bar{x}^t b$ eine Involution $\sum_b$ von D_n definiert ($\sum = \sum_1$).

$H_n(D, \sigma, b)$ bezeichne die Unteralgebra der speziellen Jordan-Algebra D_n^+ , die durch die $\sum_b$ -invarianten Elemente von D_n definiert wird.

Dann gilt

Satz 6 : $A = H_n(D, \sigma, b)$ ist kohomologisch zulässige unitäre Jordan-Algebra ($n \geq 4$!)

Beweis : wegen $H_n(D, \sigma, b) \cong H_n(D, \sigma)^{(b)}$
vgl. N. Jacobson [12], S.60 und Lemma 8 genügt es, den Standardfall ($b = 1$) zu betrachten.

Sei nun $0 \rightarrow K \xrightarrow{\gamma} A \rightarrow 0$

eine unitäre Jordan-Nullerweiterung von

$A = H_n(D, \sigma)$.

Dann existieren eine unitäre assoziative Nullerweiterung $0 \rightarrow (L, \sigma) \hookrightarrow (E, \sigma) \xrightarrow{\varphi} (D, \sigma) \rightarrow 0$ von (D, σ) und Isomorphismen von (unitären) Jordan-Algebren, so daß folgendes Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \hookrightarrow & B & \xrightarrow{\psi} & A \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ 0 & \longrightarrow & H_n(L, \sigma) & \hookrightarrow & H_n(E, \sigma) & \xrightarrow{H_n(\varphi)} & H_n(D, \sigma) \longrightarrow 0 \end{array}$$

(vgl. dazu N. Jacobson [12], S.129 und S.127).

Die kohomologische Zulässigkeit von (D, σ) liefert nun die Einbettbarkeit in eine Split-Erweiterung für $0 \rightarrow (L, \sigma) \hookrightarrow (E, \sigma) \xrightarrow{\varphi} (D, \sigma) \rightarrow 0$ und

damit auch für $0 \rightarrow K \hookrightarrow B \xrightarrow{\psi} A \rightarrow 0$.

Man beachte im übrigen, daß Satz 6 auch sofort aus Ergebnissen der Arbeit [8] von N.Glassman (vgl. dort S.103 !) folgt.

Bemerkung : Die separablen Jordan-Matrixalgebren vom Grad ≥ 4 sind also kohomologisch triviale Objekte in der Kategorie der unitären Jordan-Algebren über dem Körper k . Wie im Lie-Fall existieren also auch hier kohomologisch triviale Algebren mit klassisch äußeren Derivationen (in geeignete Bimoduln; vgl. N. Jacobson [12], S.298/299).

6.2 Kohomologisch nicht zulässige unitäre Jordan-Algebren.

Betrachte $A = k[\varepsilon]$, die Algebra der dualen Zahlen über dem Körper k , als unitäre Jordan-Algebra.

Dann ist A nicht kohomologisch zulässig.

Die Argumentation ist wie in der Arbeit [2] von J.M.Beck, wo die Nicht-Zulässigkeit von A in der Kategorie der unitären kommutativen und assoziativen Algebren über k gezeigt wird.

Man beachte zuerst, daß $U_1 = k[\eta] = k[x]/(x^3)$ unitäre universelle Jordan-Multiplikationseinhüllende von A ist (vgl. dazu N. Jacobson [12], S.111).

Als k -Unterraum ist dabei $A = k[\varepsilon]$ vermöge $1 \mapsto 1, \varepsilon \mapsto \eta$ in $U_1 = k[\eta]$ eingebettet.

Nun gilt : U_1 ist U_1 -injektiver U_1 -Linksmodul.

Denn : Sei zu $1, \eta, \eta^2, 1^*, \eta^*, \eta^{2*}$ die

duale k -Basis von $U_1^* = \text{Hom}_k(U_1, k)$

U_1^* ist in bekannter Weise (Rechtsmultiplikation im Argumentbereich) U_1 -Linksmodul, und als solcher U_1 -injektiv (vgl. dazu Cartan-Eilenberg [4], S.30)

Außerdem verifiziert man sofort, daß die Zuordnung $1 \mapsto \eta^{2*}, \eta \mapsto \eta^*, \eta^2 \mapsto 1^*$ einen U_1 -Isomorphismus der U_1 -Linksmoduln U_1 und U_1^* definiert.

Betrachte nun folgendes Faktorsystem h von $A = k[\varepsilon]$ in $U_1 = k[\eta]$:

Es soll gelten : $h(1 \otimes \varepsilon) = h(\varepsilon \otimes 1) = h(1 \otimes 1) = 0$

$$h(\varepsilon \otimes \varepsilon) = 1$$

h ist dann kommutatives und assoziatives Faktorsystem, insbesondere auch Jordan-Faktorsystem von A in U_1 . h ist aber nicht trivial, d.h. $1\text{-Ext}(A, U_1) \neq 0$ (wohingegen natürlich $H^1(A, U_1) = 0$ gilt).

Wäre nämlich h trivial, dann müßte für h trivialisierendes $\gamma \in \text{Hom}_k(A, U_1)$ gelten :

$$1 = h(\varepsilon \otimes \varepsilon) = \gamma(\varepsilon^2) - \varepsilon\gamma(\varepsilon) - \varepsilon\gamma(\varepsilon) = -2\eta\gamma(\varepsilon)$$

Nun gilt sicher : $\eta\gamma(\varepsilon) \in k\eta \oplus k\eta^2$, und damit Widerspruch.

$A = k[\varepsilon]$ ist somit kohomologisch nicht zulässige unitäre Jordan-Algebra.

Man beachte auch folgende interessanten Besonderheiten des vorliegenden Beispiels :

Ebenso wie die kohomologisch zulässigen Jordan-Matrixalgebren vom Grad ≥ 4 ist $A = k[\varepsilon]$ stark-spezielle und reflexive unitäre Jordan-Algebra (vgl. N. Jacobson [12]); überdies ist die angegebene nicht-zulässige Erweiterung $E_n(A, U_1)$ speziell.

Bemerkungen :

- (1) Man beachte, daß $A = k[\varepsilon]$ kohomologisch nicht zulässig in den Kategorien der unitären kommutativen und assoziativen Algebren sowie der unitären Jordan-Algebren, wohl aber kohomologisch zulässig in der Kategorie der unitären assoziativen Algebren ist.
- (2) Zu $n \geq 1$ sei $B_n = H_n(A, \text{id})$ die Jordan-Matrixalgebra der symmetrischen $n \times n$ -Matrizen mit Koeffizienten aus $A = k[\varepsilon]$. A kann dann in natürlicher Weise als Unter algebra von B_n (mit gleichem Einselement) aufgefaßt werden. Für $n \geq 4$ ist B_n sicher kohomologisch zulässig. Damit ist ein Beispiel gegeben, daß Unterobjekte kohomologisch zulässiger Objekte nicht mehr kohomologisch zulässig zu sein brauchen.

6.3 Eine Lie-theoretische Charakterisierung zulässiger Jordan-Erweiterungen.

Die nun folgenden Überlegungen stützen sich auf Ergebnisse von N. Glassman (in [8], III.1), die dieser in Anlehnung an Techniken von B. Harris (vgl. dazu die Arbeit [9]) im Rahmen der Tits-Koecher-Einbettungsmethoden (vgl. dazu N. Jacobson [12], M. Koecher [13] oder H. Meyberg [20]) erhält.

Sei dazu A eine unitäre Jordan-Algebra über dem Körper k , $\text{char } k \neq 2, 3$.

$K_S(A)$ bezeichne die Standard-Lie-Einbettung von A , d.h. die Lie-Algebra mit Automorphismus der Periode 2, wie sie in der Arbeit [13] von M. Koecher diskutiert ist. Die dort verwendete Bezeichnungsweise wird im folgenden übernommen.

$K_u(A)$ bezeichne die universelle Lie-Einbettung von A ,

d.h. die Lie-Algebra mit Automorphismus der Periode 2, die entsteht, wenn man in der Koecher-Konstruktion der Standard-Lie-Einbettung die von $L(A)$ in $\text{End}_k A$ erzeugte Unter-Lie-Algebra durch die von $\lambda(A)$ in U_1 erzeugte Unter-Lie-Algebra ersetzt ($\lambda: A \longrightarrow U_1$ die kanonische unitäre Jordan-Multiplikationsspezialisierung von A in ihre unitäre universelle Jordan-Multiplikationseinhüllende U_1); man vgl. dazu N. Jacobson [12], S. 342, oder auch N. Glassman [8].

Die Zuordnung $A \longmapsto K_u(A)$ induziert einen kovarianten Funktor von der Kategorie der unitären Jordan-Algebren über k in die Kategorie der Lie-Algebren mit Automorphismus der Periode 2 über k .

Man beachte, daß ein kanonischer Epimorphismus (Fortsetzung der Identität auf A) von Lie-Algebren mit Automorphismus der Periode 2 $\pi: K_u(A) \longrightarrow K_s(A)$ existiert, vermöge dessen jeder Lie-Modul mit Automorphismus der Periode 2 von $K_s(A)$ auch als Lie-Modul mit Automorphismus der Periode 2 von $K_u(A)$ aufgefaßt werden kann.

Sei nun M ein unitärer Jordan-Bimodul von A , und betrachte $E = E(A, M)$, die zugehörige Standard-Split-Erweiterung. Dann ist $K_s(E)$ von der Form $K_s(E) = E(K_s(A), M_s)$, wobei M_s das unter dem Automorphismus der Periode 2 von $K_s(E)$ invariante Ideal $M_s = M \oplus \bar{M} \oplus L(M) \oplus [L(A), L(M)]$ ist ($[M_s, M_s] = 0$ in $K_s(E)$ kann leicht verifiziert werden).

Im folgenden wird ausnahmslos die $K_u(A)$ -Modulstruktur von M_s betrachtet und als Multiplikation in $E(K_u(A), M_s)$ notiert (d.h. $[\lambda(a), m]$ statt $\lambda(a).m$, usw.).

Da nur in der Kategorie der Lie-Algebren mit Automorphismus der Periode 2 argumentiert wird, soll auf die umständliche σ -Notation ($K_u(A) = (K_u(A), \sigma)$ usw.) verzichtet werden.

Sei nun eine unitäre Jordan-Nullerweiterung

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E_h(A, M) \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

von A gegeben (h ein unitäres Jordan-Faktorsystem von A in M).

Dann erhält man daraus eine Lie-Nullerweiterung mit Automorphismus der Periode 2

$$0 \longrightarrow M_S \longrightarrow E_g(K_u(A), M_S) \longrightarrow K_u(A) \longrightarrow 0$$

wobei das Lie-Faktorsystem g von $K_u(A)$ in M_S folgendermaßen durch h bestimmt ist :

$$(1) \quad g(A \otimes A) = g(\bar{A} \otimes \bar{A}) = g(\lambda(A) \otimes \lambda(A)) = 0$$

$$(2) \quad g(A \otimes \bar{A}) \subset L(M) \quad \text{und} \quad g(a \otimes b) = L(h(a \otimes b))$$

$$(3) \quad g(\lambda(A) \otimes A) \subset M \quad \text{und} \quad g(\lambda(a) \otimes b) = h(a \otimes b)$$

$$(4) \quad g([\lambda(A), \lambda(A)] \otimes A) \subset M$$

$$\text{und } g([\lambda(a), \lambda(b)] \otimes x) = h(xa \otimes b) + bh(x \otimes a) - \\ h(xb \otimes a) - ah(x \otimes b)$$

$$(5) \quad g([\lambda(A), \lambda(A)] \otimes \lambda(A)) \subset L(M)$$

$$\text{und } g([\lambda(a), \lambda(b)] \otimes \lambda(x)) = L(g([\lambda(a), \lambda(b)] \otimes x))$$

$$(6) \quad g([\lambda(A), \lambda(A)] \otimes [\lambda(A), \lambda(A)]) \subset [L(A), L(M)]$$

$$\text{und } g([\lambda(a), \lambda(b)] \otimes [\lambda(x), \lambda(y)]) =$$

$$[L(a), L(g(b \otimes [\lambda(x), \lambda(y)]))] + [L(b), L(g([\lambda(x), \lambda(y)] \otimes a))]$$

Bezüglich Einzelheiten sei auf die Arbeit [8] von N. Glassman verwiesen; das dortige Theorem 5, S.80, liefert die für unsere Überlegungen interessante Information :

Die eben beschriebene Zuordnung induziert eine k-lineare Injektion von $1\text{-Ext}(A, M)$ in $1\text{-Ext}(K_u(A), M_S)$.

Im folgenden soll nun die Zulässigkeit einer unitären Jordan-Nullerweiterung der Form $E_h(A, M)$ durch Eigenschaften der zugeordneten Lie-Erweiterung mit Automorphismus der Periode 2 $E_g(K_u(A), M_S)$ charakterisiert werden.

Die Erweiterung $E_g(K_u(A), M_S)$ heie Jordan-zulässig, falls sie in eine Split-Erweiterung $E_g(K_u(A), R)$ eingebettet werden kann, die ein g trivialisierendes $f: K_u(A) \longrightarrow R$ mit den Eigenschaften

$$(i) \quad f(1) = 0$$

$$(ii) \quad \left[1, \left[\lambda(a), f(\lambda(b)) \right] \right] = 0 \text{ für alle } a, b \in A$$

erlaubt.

Bemerkungen :

(1) Für ein g trivialisierendes $f: K_u(A) \longrightarrow R$ mit $f(1) = 0$ ist (ii) quivalent zu

$$\left[\lambda(a), f(b) \right] + \left[a, f(\lambda(b)) \right] = 0 \text{ für alle } a, b \in A.$$

Das wird weiter unten noch gezeigt werden.

(2) Man beachte, daß die in Satz 2 angegebene kanonische Einbettung von $E_g(K_u(A), M_S)$ in eine Split-Erweiterung keine Information über die Jordan-Zulässigkeit von $E_g(K_u(A), M_S)$ liefert; präziser :

Sei U die universelle Lie-Multiplikationseinhüllende von $K_u(A)$, $U_\sigma = U \oplus U_\sigma$ die daraus gebildete universelle Lie-Multiplikationseinhüllende mit Automorphismus der Periode 2 von $K_u(A)$. Wähle linear geordnete k -Basis B von $K_u(A)$, so daß gilt : $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ mit $B_1 < B_2 < B_3$ (klar, wie zu interpretieren), und B_1 ist k -Basis von A , B_2 ist k -Basis von $\bar{A}$, B_3 ist k -Basis von $\lambda(A) \oplus [\lambda(A), \lambda(A)]$. Sei dann $\theta \in \text{Hom}_k(U_\sigma \otimes K_u(A), M_S)$ die unter 5.2.1 (c) definierte, die Zulässigkeit von g garantierende k -lineare Abbildung, und werde θ zu $\theta \in \text{Hom}_k(U_\sigma \otimes K_u(A), M_S)$ vermöge $\theta(u\sigma l) := \theta(u\sigma \bar{l})$, $u \in U$, $l \in K_u(A)$, fortgesetzt. Sei des weiteren (vgl. Satz 2) $f \in \text{Hom}_k(U_\sigma \otimes U_\sigma \otimes K_u(A), M_S)$ der durch $f(u\sigma v\sigma l) := \theta(uv\sigma l) - u\theta(v\sigma l)$ definierte 1-Kozykel, dann erhält man die Einbettung von $E_g(K_u(A), M_S)$ in die Split-Erweiterung $E_g(K_u(A), E_f(D(K_u(A)), M_S))$ wie in Satz 2 beschrieben.

Man verifiziert leicht, daß in unserem Fall g durch $-\partial (\partial \in \text{Der}(K_u(A), D(K_u(A))))$ kanonisch), aufgefaßt

als Abbildung von $K_u(A)$ in $E_f(D(K_u(A)), M_s)$, trivialisiert wird. Damit ist klar, daß ein g trivialisierendes $\gamma: K_u(A) \longrightarrow E_f(D(K_u(A)), M_s)$ mit den geforderten Eigenschaften genau dann existiert, wenn es eine Derivation $d \in \text{Der}(K_u(A), E_f(D(K_u(A)), M_s))$ gibt mit

$$(i) \quad d(1) = \partial(1)$$

$$(ii) \quad [\lambda(a), d(b)] + [a, d(\lambda(b))] = - [\lambda(a), \partial(b)] - [a, \partial(\lambda(b))]$$

für alle $a, b \in A$

Nun gilt in $E_f(D(K_u(A)), M_s)$:

$$[1_1, \partial(1_2)] = 1_1 \cdot \partial(1_2) \otimes \theta(1_1 \otimes 1_2) ,$$

$$1_1 1_2 \in K_u(A) \quad (c \ U_\sigma)$$

(die punktierte Verknüpfung ist die ursprüngliche des U_σ -Linksmoduls $D(K_u(A))$).

$$\text{wegen } [a, d(\lambda(b))] = [\lambda(b), d(a)] - d(ab)$$

(d Derivation !) muß somit schließlich gelten :

$$d(ab) - [\lambda(a), d(b)] - [\lambda(b), d(a)] = -\partial(ab) + \lambda(a) \cdot \partial(b) + \lambda(b) \cdot \partial(a) \otimes h(a \otimes b) \quad \text{für alle } a, b \in A.$$

Bezeichne nun $d_0 \in \text{Hom}_k(A, M)$ die durch d vermöge Restriktion im Argument- und Bildbereich induzierte k -lineare Abbildung, so erhält man

$$h(a \otimes b) = d_0(ab) - ad_0(b) - bd_0(a) \quad \text{für alle } a, b \in A.$$

d.h. h muß notwendig bereits trivial sein.

Das Ziel der weiteren Überlegungen ist der Beweis des nachstehenden Satzes :

Satz 7 : Die unitäre Jordan-Nullerweiterung

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E_h(A, M) \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

$$\text{ist zulässig} \quad \Longleftrightarrow$$

Die zugeordnete Lie-Nullerweiterung mit Automorphismus der Periode 2

$$0 \longrightarrow M_s \longrightarrow E_g(K_u(A), M_s) \longrightarrow K_u(A) \longrightarrow 0$$

ist Jordan-zulässig.

Die erste notwendige Information liefert das folgende

Lemma 9 : Sei Q ein Lie-Modul mit Automorphismus der Periode 2 von $K_u(A)$.

Q ist von der Form $Q = N_S$ (N ein unitärer Jordan-Bimodul von A) genau dann, wenn gilt :

- (1) $Q = N \oplus \bar{N} \oplus [A, \bar{N}]$
und $N = \{x \in Q : [\lambda(1), x] = x\}$
- (2) $[1, \bar{N}]$ besteht nur aus ungeraden Elementen
- (3) $[A, \bar{N}] \cap Q^A = 0$
wobei $Q^A = \{x \in Q : [A, x] = 0\}$

Beweis : Sei zuerst $Q = N_S = N \oplus \bar{N} \oplus L(N) \oplus [L(A), L(N)]$
(betrachtet als Ideal in $K_S(E(A, N))$)

Dann gilt $[A, \bar{N}] = L(N) \oplus [L(A), L(N)]$ und insbesondere $[1, \bar{N}] = L(N)$, so daß (1) - (3) erfüllt sind.

Sei umgekehrt Q ein Lie-Modul mit Automorphismus der Periode 2 von $K_u(A)$, der (1) und (2) erfüllt.

Dann gilt : N ist unitärer Jordan-Bimodul von A

$$\text{vermöge } a.n = [\lambda(a), n], \quad a \in A, \quad n \in N,$$

und es existiert ein Epimorphismus

$\varphi: Q \rightarrow N_S$ von Lie-Moduln mit Automorphismus der Periode 2 für $K_u(A)$, so daß

$$\text{gilt : } (a)\varphi / N \oplus \bar{N} = \text{id}_N \oplus \bar{N}$$

$$(b) \text{ Ker } \varphi = [A, \bar{N}] \cap Q^A$$

Beweis der Behauptung :

(i) Man sieht sofort, daß

$$\bar{N} = \{x \in Q : [\lambda(1), x] = -x\}$$

$$[A, \bar{N}] = \{ x \in Q : [\lambda(1), x] = 0 \}$$

und daraus ergibt sich

$$[A, N] = [\bar{A}, \bar{N}] = 0$$

$$(ii) [A, \bar{N}] = [1, \bar{N}] \oplus [\lambda(A), [1, \bar{N}]]$$

wobei gilt :

$$[a, \bar{x}] = - [1, [\lambda(a), \bar{x}]] \oplus [\lambda(a), [1, \bar{x}]]$$

für alle $a \in A, x \in N$.

Die einzige Schwierigkeit besteht darin einzusehen, daß $[1, \bar{N}] \cap [\lambda(A), [1, \bar{N}]] = 0$ gilt.

Das ergibt sich aber sofort aus

$$[\bar{1}, [1, \bar{x}]] = \bar{x} \quad \text{für alle } x \in N$$

$$[\bar{1}, [\lambda(A), [1, \bar{N}]]] = 0, \text{ wie leicht zu verifizieren.}$$

(iii) N ist unitärer Jordan-Bimodul von A
vermöge $a.x = [\lambda(a), x]$, $a \in A, x \in N$.

Bezeichne $l : A \rightarrow \text{End}_K N$ die dementsprechende unitäre Multiplikationsspezialisierung, d.h. es gilt

$$l(a)x = [\lambda(a), x] \quad , \quad a \in A, x \in N.$$

Zu zeigen :

$$(\alpha) [l(a), l(a^2)] = 0 \quad \text{für alle } a \in A$$

$$(\beta) l(a)l(b)l(c)+l(c)l(b)l(a)+l((ac)b) = \\ l(a)l(bc)+l(b)l(ac)+l(c)l(ab)$$

für alle $a, b, c \in A$

$$(\alpha) \text{ folgt sofort aus } [\lambda(a), \lambda(a^2)] = 0 \text{ in } K_u(A).$$

(β) erfordert einen gewissen rechnerischen Aufwand; es muß nämlich gezeigt werden:

$$[\lambda(a), [\lambda(b), [\lambda(c), x]]] + [\lambda(c), [\lambda(a), [\lambda(b), x]]] \\ + [\lambda((ac)b), x] - [\lambda(a), [\lambda(bc), x]] - \\ [\lambda(b), [\lambda(ac), x]] - [\lambda(c), [\lambda(ab), x]] = 0$$

für alle $a, b, c \in A$ und $x \in N$.

Das ist nichts anderes als die Jacobi-Identität für die Elemente $U = \lambda(a)$,
 $V = [\lambda(b), [1, \bar{x}]]$ und $W = c$ von $E(K_u(A), Q)$.

Es gilt nämlich :

$$\begin{aligned} [U, [V, W]] &= [\lambda(a), [\lambda(b), [\lambda(c), x]]] - \\ &\quad [\lambda(a), [\lambda(bc), x]] \\ [V, [W, U]] &= [\lambda((ac)b), x] - [\lambda(b), [\lambda(ac), x]] \\ [W, [U, V]] &= [\lambda(c), [\lambda(b), [\lambda(a), x]]] - \\ &\quad [\lambda(c), [\lambda(ab), x]] \end{aligned}$$

Auf die im Detail nicht sehr informative Ausrechnung der Identitäten soll hier verzichtet werden; man beachte nur, daß erst an dieser Stelle die Voraussetzung (2) benötigt wird.

(iv) Betrachte nun die beiden Lie-Moduln mit Automorphismus der Periode 2 von $K_u(A)$

$$Q = N \oplus \bar{N} \oplus [1, \bar{N}] \oplus [\lambda(A), [1, \bar{N}]]$$

$$N_S = N \oplus \bar{N} \oplus L(N) \oplus [L(A), L(N)]$$

Definiere $\varphi: Q \longrightarrow N_S$ durch

$$(\alpha) \varphi/N \oplus \bar{N} = \text{id}_N \oplus \bar{N}$$

$$(\beta) \varphi([1, \bar{x}]) = L(x) \quad \text{für alle } x \in N$$

$$(\gamma) \varphi\left(\sum [\lambda(a_i), [1, \bar{x}_i]]\right) = \sum [L(a_i), L(x_i)]$$

für alle $a_i \in A, x_i \in N$

Dann hat φ sicher alle behaupteten Eigenschaften, sofern nur gezeigt wird :

$$(*) \quad L(x) = 0 \iff [1, \bar{x}] = 0$$

$$(**) \quad \sum [L(a_i), L(x_i)] = 0 \iff \sum [\lambda(a_i), [1, \bar{x}_i]] \in Q^A$$

Zu $(*)$:

$$L(x) = 0 \iff L(x)a = 0 \text{ für alle } a \in A \iff$$

$$[\lambda(a), x] = 0 \text{ für alle } a \in A \Leftrightarrow [\lambda(a), \bar{x}] = 0 \\ \text{für alle } a \in A$$

$$L(x) = 0 \Rightarrow [\lambda(1), x] = x = 0 \Rightarrow [1, \bar{x}] = 0$$

$$[1, \bar{x}] = 0 \Rightarrow [\lambda(a), \bar{x}] = [[1, \bar{a}], \bar{x}] = -[\bar{a}, [1, \bar{x}]] = 0 \\ \text{für alle } a \in A$$

Zu (**):

$$\sum [L(a_i), L(x_i)] = 0 \Leftrightarrow \sum (L(a_i)L(x_i)b - L(x_i)L(a_i)b) \\ = 0 \text{ für alle } b \in A$$

$$\Leftrightarrow \sum ([\lambda(a_i), [\lambda(b), x_i]] - [\lambda(a_i b), x_i]) = 0 \\ \text{für alle } b \in A$$

$$\Leftrightarrow \left[\sum [\lambda(a_i), [1, \bar{x}_i]], b \right] = 0 \text{ für alle } b \in A$$

$$\Leftrightarrow \sum [\lambda(a_i), [1, \bar{x}_i]] \in \hat{Q}^A$$

Dabei ist die Identität (in $E(K_u(A), Q)$)

$$[\lambda(a), [\lambda(b), x]] - [\lambda(ab), x] = [[\lambda(a), [1, \bar{x}]], b]$$

für alle $a, b \in A$, $x \in N$, unschwer zu verifizieren.

Damit ist Lemma 9 bewiesen.

Ein Lie-Modul mit Automorphismus der Periode 2 von $K_u(A)$ der Form $Q = N \oplus \bar{N} \oplus [A, \bar{N}]$ mit

$$N = \{x \in Q : [\lambda(1), x] = x \text{ und } [1, \bar{x}] = -[\bar{1}, x]\}$$

heiße Jordan-zulässig.

Lemma 10 : Sei R ein beliebiger Lie-Modul mit Automorphismus der Periode 2 von $K_u(A)$.

$$\text{Setze } N := \left\{ x \in R : [A, x] = 0, [\lambda(1), x] = x \right. \\ \left. \text{und } [1, [1, \bar{x}]] = -x \right\}$$

Sei Q der von N erzeugte $K_u(A)$ -Untermodul (mit Automorphismus der Periode 2) von R .

Dann ist Q Jordan-zulässig.

Beweis :

$$(i) \text{ Für } x \in R \text{ mit } [A, x] = 0 \text{ und } [\lambda(1), x] = x \\ \text{gilt : } [1, [1, \bar{x}]] = -x \Leftrightarrow [1, \bar{x}] = -[\bar{1}, x]$$

$\Rightarrow$: Setze $u := [1, \bar{x}] + [\bar{1}, x]$
 Dann erhält man sofort $[\bar{1}, u] = 0$
 und (unter Beachtung von $[1, [\bar{1}, [\bar{1}, x]]] = [\bar{1}, x]$)
 $[1, [\bar{1}, u]] = u$, also $u = 0$

$\Leftarrow$: folgt unmittelbar

(ii) Betrachte die Unter-Lie-Algebra $L_u(A) = \lambda(A) \oplus [\lambda(A), \lambda(A)]$
 von $K_u(A)$. Dann gilt: N ist $L_u(A)$ -invariant.

Das läßt sich ohne große Schwierigkeiten verifizieren.

(iii) Betrachte $Q_0 = N + \bar{N} + [A, \bar{N}]$.

Dann erhält man zuerst $Q_0 = N \oplus \bar{N} \oplus [A, \bar{N}]$, da $\lambda(1)$ auf N als id_N , auf $\bar{N}$ als $-\text{id}_{\bar{N}}$ und auf $[A, \bar{N}]$ als Nullabbildung operiert.

$Q_0 = \bar{Q}_0$ gilt wegen $[A, \bar{N}] = [\bar{A}, N]$:

$$[a, \bar{x}] = [1, [\lambda(a), x]] \oplus [\lambda(a), [1, \bar{x}]]$$

$$\text{gemäß } [A, \bar{N}] = [1, \bar{N}] \oplus [\lambda(A), [1, \bar{N}]]$$

(wie in Lemma 9), daher auch

$$[\bar{a}, x] = -[1, [\lambda(a), x]] \oplus [\lambda(a), [1, \bar{x}]]$$

Zuletzt verifiziert man leicht $[K_u(A), Q] \subset Q$:

$$[L_u(A), Q] \subset Q, \text{ da } [L_u(A), N] \subset N$$

$$\text{sofort } [L_u(A), \bar{N}] \subset \bar{N} \text{ und damit}$$

$$[L_u(A), [A, \bar{N}]] \subset [A, \bar{N}] \text{ impliziert;}$$

$$\text{außerdem } [A, Q] \subset Q, \text{ da}$$

$$[A, [A, \bar{N}]] = [A, [\bar{A}, N]] \subset N \text{ gilt.}$$

Damit ist Lemma 10 bewiesen.

Zu beliebigem Lie-Modul mit Automorphismus der Periode 2 R von $K_u(A)$ bezeichne $Js(R)$ den in Lemma 10 definierten $K_u(A)$ -Untermodul (mit Automorphismus der Periode 2), den Jordan-Sockel von R (Sockel, da $JsJs(R) = Js(R)$ und $\varphi(Js(R)) \subset Js(\varphi(R))$ für $K_u(A)$ -Homomorphismen φ gilt).

Nun zum Beweis von Satz 7 :

(i) $E_h(A, M)$ zulässig $\iff E_g(K_u(A), M_s)$ ist in Split-Erweiterung der Form $E_g(K_u(A), N_s)$ einbettbar

$\implies$: Sei $E_h(A, M)$ in Split-Erweiterung $E_h(A, N)$ eingebettet;

dann ist $E_g(K_u(A), M_s)$ in Split-Erweiterung

$E_g(K_u(A), N_s)$ eingebettet

$\impliedby$: Sei nun umgekehrt $E_g(K_u(A), M_s)$ in Split-Erweiterung der Form $E_g(K_u(A), N_s)$ eingebettet.

Dann liefert aber N. Glassman [8], Theorem 5, S.80, eine Split-Erweiterung $E_h(A, N)$, so daß $g = g(h')$ in der oben beschriebenen Weise gilt; das hat aber $h' = h$ zur Folge, und die Einbettung von $E_h(A, M)$ in $E_h(A, N)$ ist gesichert.

(ii) $E_g(K_u(A), M_s)$ ist in eine Split-Erweiterung $E_g(K_u(A), N_s)$ einbettbar $\iff E_g(K_u(A), M_s)$ ist in eine Split-Erweiterung $E_g(K_u(A), Q)$ mit Jordan-zulässigem Q einbettbar.

$\implies$: trivial

$\impliedby$: betrachte die Situation von Lemma 9 und den dort angegebenen kanonischen Epimorphismus $\varphi: Q \twoheadrightarrow N_s$; φ/M_s ist sicher injektiv, d.h. M_s kann als Untermodul von N_s aufgefaßt werden, so daß dann auch $E_g(K_u(A), N_s)$ wohldefiniert und zerfallend ist, womit die Behauptung folgt.

(iii) $E_g(K_u(A), M_s)$ ist in eine Split-Erweiterung $E_g(K_u(A), Q)$ mit Jordan-zulässigem Q einbettbar $\iff$ es gibt $K_u(A)$ -Obermodul R von M_s und g trivialisierendes $f: K_u(A) \rightarrow R$ mit $\text{Im } f \subset Js(R)$.

Das ist nur eine Umformulierung des Sachverhaltes.

(iv) Es gibt g trivialisierendes $f: K_u(A) \rightarrow R$ mit $\text{Im } f \subset Js(R)$ $\iff$

Es gibt g trivialisierendes $\sigma: K_u(A) \rightarrow R$

mit (*) $\mathcal{J}(1) = 0$

$$(**) [\lambda(a), \mathcal{J}(b)] + [a, \mathcal{J}(\lambda(b))] = 0$$

für alle $a, b \in A$

$\Leftarrow$: Zu zeigen: $\text{Im } \mathcal{J} \subset N \oplus \bar{N} \oplus [A, \bar{N}]$ (N wie in Lemma 10).

Allein $\mathcal{J}(1) = 0$ hat bereits

$$[\lambda(1), \mathcal{J}(a)] = \mathcal{J}(a)$$

$$[1, [1, \overline{\mathcal{J}(a)}]] = -\mathcal{J}(a) \quad \text{für alle } a \in A$$

zur Folge.

Denn:

wegen $g(\lambda(1) \otimes a) = 0$ gilt

$$\mathcal{J}(a) = [\lambda(1), \mathcal{J}(a)] - [a, \mathcal{J}(\lambda(1))] = [\lambda(1), \mathcal{J}(a)]$$

$$\text{da } \mathcal{J}(\lambda(1)) = [1, \overline{\mathcal{J}(1)}] - [1, \mathcal{J}(1)] = 0$$

Außerdem erhält man

$$[1, [1, \overline{\mathcal{J}(a)}]] = -\mathcal{J}(a) \quad \text{wegen}$$

$$[1, \overline{\mathcal{J}(a)}] = \mathcal{J}(\lambda(a)) \quad (\text{das folgt aus } g(1 \otimes \bar{a}) = 0)$$

$$[1, \mathcal{J}(\lambda(a))] = -\mathcal{J}(a) \quad (\text{das folgt aus } g(1 \otimes \lambda(a)) = 0)$$

$$[\lambda(a), \mathcal{J}(b)] + [a, \mathcal{J}(\lambda(b))] = 0 \quad \text{liefert schließlich}$$

$$0 = [1, [\lambda(a), \mathcal{J}(b)]] + [1, [a, [\mathcal{J}(\lambda(b))]]] = \\ -2[a, \mathcal{J}(b)]$$

$$\text{d.h. } [A, \mathcal{J}(a)] = 0 \quad \text{für alle } a \in A.$$

Also: $\mathcal{J}(A) \subset N$ und damit $\mathcal{J}(\bar{A}) \subset \bar{N}$.

Wegen $\mathcal{J}(\lambda(a)) = [1, \overline{\mathcal{J}(a)}]$ und

$$\mathcal{J}([\lambda(a), \lambda(b)]) = [\lambda(a), \mathcal{J}(\lambda(b))] - [\lambda(b), \mathcal{J}(\lambda(a))]$$

$$(g(\lambda(A) \otimes \lambda(A)) = 0!)$$

gilt dann $\mathcal{J}(L_u(A)) \subset [A, \bar{N}]$ und fertig.

Zwischenbemerkung:

Für ein g trivialisierendes $\mathcal{J}: K_u(A) \longrightarrow R$

mit $\mathcal{J}(1) = 0$ sind äquivalent:

$$(**) \quad [\lambda(a), \delta(b)] + [a, \delta(\lambda(b))] = 0 \text{ für alle } a, b \in A$$

$$(oo) \quad [1, [\delta(a), \delta(\lambda(b))]] = 0 \text{ für alle } a, b \in A$$

$$(++) \quad [a, \delta(b)] = 0 \text{ für alle } a, b \in A$$

Auf einen Beweis soll hier verzichtet werden; die Äquivalenz von (**) und (oo) folgt durch geschickte Umformungen; (**) impliziert (++), wie eben gezeigt, und (++) impliziert (**) problemlos.

$\Rightarrow$: Sei nun g trivialisierendes $\gamma: K_u(A) \longrightarrow R$ mit $\text{Im } \gamma \subset Js(R) = N \oplus \bar{N} \oplus [A, \bar{N}]$ gegeben. Wie in Glassman [8], S.85 schließt man zuerst :

$$\gamma(1) = [1, \bar{x}] \text{ mit geeignetem } x \in N.$$

Definiere $\delta: K_u(A) \longrightarrow R$ durch

$$\delta(1) := \gamma(1) - [1, x + \bar{x}], \quad 1 \in K_u(A)$$

Dann gilt $\delta(1) = 0$ und δ trivialisiert g .

Wegen $[\lambda(1), \delta(a)] = \delta(a)$ für alle $a \in A$ (vgl. die vorher bewiesene Richtung der Äquivalenz) gilt $\delta(A) \subset N$, d.h. $[A, \delta(A)] = 0$, und vermöge Zwischenbemerkung ist damit alles gezeigt.

Damit ist der Beweis von Satz 7 beendet.

Literatur :

- [1] M. Barr
G.S. Rinehart
Cohomology as the derived
functor of derivations,
Trans. Amer. Math.Soc., 122 (1966)
- [2] J.M. Beck
Triples, Algebras and Cohomology,
Dissertation, Columbia University,
1967.
- [3] H. Braun
M. Koecher
Jordan-Algebren, Springer-Verlag,
1966.
- [4] H. Cartan
S.Eilenberg
Homological Algebra, Princeton
Univ. Press, Princeton N.J., 1956.
- [5] R.H. Crowell
The derived module of a homomor-
phism,
Advances Math., 6 (1971)
- [6] M. Gerstenhaber
A uniform cohomology theory for
algebras,
Proc.Nat. Acad. Sci. U.S.A.,
52 (1964)
- [7] M. Gerstenhaber
On the deformations of rings and
algebras, Ann. Math., 79 (1964)
- [8] N. Glassman
Cohomology of non-associative
algebras, Dissertation,
Yale University, 1968.
- [8a] N. Glassman
Cohomology of non-associative
algebras, Pacific J. Math.,
33 (1970)
- [8b] N. Glassman
Cohomology of Jordan Algebras,
J. Algebra, 15 (1970)
- [9] B. Harris
Cohomology of Lie triple systems
and Lie algebras with involution,
Trans.Amer. Math.Soc., 98 (1961)
- [10] P.J. Hilton
U.Stammbach
A Course in Homological Algebra,
Springer-Verlag, 1971.
- [11] N. Jacobson
Lie-Algebras, Interscience Publ.,
1962.

- [12] N. Jacobson Structure and representations
of Jordan Algebras, Amer.Math.
Soc. Coll.Publ., 1968
- [13] M. Koecher Imbedding of Jordan Algebras
into Lie Algebras I.
Amer. J. Math., 89 (1967)
- [14] J. Knopfmacher Universal envelopes for non-
associative algebras,
Quart.J.Math. (Oxford), 13 (1962)
- [15] G. Kreisel Éléments de logique mathématique.
J.L. Krivine Théorie des modèles.Dunod,
Paris 1967.
- [16] O. Loos Lectures on Jordan Triples,
Univ. Brit. Columbia, Vancouver
1971.
- [17] O. Loos Alternative Tripelsysteme,
Math. Ann., 198 (1972)
- [18] A.S.-T. Lue Cohomology of Algebras relative
to a variety, Math. Z., 121 (1971)
- [19] S.Mac Lane Homology, Springer-Verlag, 1963
- [20] K. Meyberg Jordan-Tripelsysteme und die
Koecher-Konstruktion von Lie-
Algebren,
Habilitationsschrift, München 1969.
- [21] B. Pareigis Kohomologie von p-Lie-Algebren,
Math.Z., 104 (1968)

Lebenslauf :

- 9.5.1943 Geboren in Brünn (Č.S.R.)
- 1949 - 1954 Besuch der Volksschule in Lauben (bei Kempten), Weilheim und München
- 1954 - 1963 Besuch der Klenze-Oberrealschule in München mit abschließendem Abitur
- 1963 Aufnahme als Stipendiat in die Stiftung Maximilianeum und Beginn des Mathematik-Studiums an der Ludwig-Maximilians-Universität München
- 1966 - 1968 Stipendienaufenthalt in Paris
- 1968 Wiederaufnahme des Mathematik-Studiums an der Ludwig-Maximilians-Universität München
- 1969 - 1970 Diplomarbeit bei Herrn Prof. Dr.K.Helwig
- 1971 - 1973 Arbeit an der vorliegenden Dissertation als Weiterführung der Diplomarbeit; Betreuung des Seminars von Herrn Prof. Dr. K. Helwig.

